

# Programme MP

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Dualité en dimension finie</b>	<b>1</b>
<b>II</b>	<b>Espaces vectoriels normés (EVN)</b>	<b>1</b>
II.1	Convergence dans un espace vectoriel normé . . . . .	1
II.2	Topologie dans $\mathbb{R}^d$ . . . . .	1
II.3	Séries dans un espace de Banach . . . . .	2
II.4	Normes subordonnées . . . . .	2
<b>III</b>	<b>Théorie de la réduction</b>	<b>2</b>
III.1	Outils d'algèbre générale . . . . .	2
III.2	Réduction des endomorphismes . . . . .	2
<b>IV</b>	<b>Calcul différentiel</b>	<b>3</b>
IV.1	Fonctions de plusieurs variables réelles . . . . .	3
IV.2	Théorème des fonctions implicites . . . . .	3
IV.3	Extrema des fonctions réelles . . . . .	4
<b>V</b>	<b>Suites et séries de fonctions</b>	<b>4</b>
V.1	Comparaison de suites et de fonctions numériques (rappels) . . . . .	4
V.2	Suites et séries de fonctions . . . . .	4
V.3	Séries entières . . . . .	4
<b>VI</b>	<b>Algèbre bilinéaire</b>	<b>4</b>
<b>VII</b>	<b>Produits scalaires, espaces euclidiens</b>	<b>5</b>
<b>VIII</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>5</b>
<b>IX</b>	<b>Équations différentielles</b>	<b>6</b>
IX.1	Équations différentielles non linéaires . . . . .	6
IX.2	Équations différentielles linéaires . . . . .	6
<b>X</b>	<b>Courbes et surfaces dans <math>\mathbb{R}^2</math> et <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>7</b>
<b>XI</b>	<b>Géométrie euclidienne dans <math>\mathbb{R}^2</math> et dans <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>7</b>
<b>XII</b>	<b>Intégrales avec paramètre</b>	<b>7</b>
<b>XIII</b>	<b>Forme différentielle de degré 1</b>	<b>8</b>
<b>XIV</b>	<b>Intégrales multiples, aires et volumes</b>	<b>8</b>

**XV Fonctions holomorphes**

**8**

## I Dualité en dimension finie

- En dimension finie, représentation matricielle dans une base d'une famille finie de vecteurs, d'une famille finie de formes linéaires; représentation matricielle dans des bases d'une application linéaire. Formules de changement de bases. Utilisation de l'algorithme de Gauss.
- Dual  $E^*$  d'un espace vectoriel  $E$  sur le corps  $\mathbb{K}$  des nombres réels ou des nombres complexes, forme bilinéaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $E^* \times E$  (crochet de dualité).
- Sous-espace vectoriel de codimension finie; application linéaire de rang fini, théorème du rang. Hyperplans indépendants; l'intersection de  $k$  hyperplans est un sous-espace vectoriel de codimension inférieure ou égale à  $k$ , avec égalité si et seulement si les hyperplans sont indépendants.
- Système de coordonnées sur  $E$  dans le cas où  $E$  est de dimension finie; tout système de coordonnées sur  $E$  est une base de  $E^*$ ; réciproquement, toute base de  $E^*$  est un système de coordonnées sur  $E$ ; bases duales
- Systèmes d'équations linéaires; sous-variétés affines de  $E$ ; équations para-métriques, implicites d'une sous-variété affine de  $E$  dans une base donnée.

## II Espaces vectoriels normés (EVN)

### II.1 Convergence dans un espace vectoriel normé

- Semi-norme, norme, distance associée à une norme; inégalité triangulaire. Espace vectoriel normé (réel ou complexe). Boule ouverte, fermée.
- Partie bornée, application bornée d'un ensemble dans un espace vectoriel normé  $E$ . Application lipschitzienne d'une partie de  $E$  dans un espace vectoriel normé  $F$ .
- Normes  $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1$  sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{C}^d$ ; norme produit sur le produit d'une famille finie d'espaces vectoriels normés.
- Voisinage, ouvert, fermé. Point intérieur, point adhérent; intérieur, adhérence et frontière d'une partie. Partie dense.
- Adhérence d'une boule ouverte.
- Suite convergente à valeurs dans  $E$ . Suites extraites d'une suite convergente. Valeurs d'adhérence d'une suite. Caractérisation séquentielle d'un fermé et de l'adhérence d'une partie.
- Limite d'une application d'une partie  $X$  de  $E$  dans  $F$  en un point adhérent à  $X$ ; continuité en un point. Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite. Extension de la notion de limite: limite en  $\pm\infty$  d'une fonction de la variable réelle à valeurs dans  $F$ , limite infinie d'une application de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  en un point adhérent à  $X$ . Relations de comparaison.
- Caractérisation de la convergence dans un espace produit.
- Application continue. Ouvert, fermé relatif à une partie. Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue. Une application lipschitzienne est continue.
- Continuité des opérations algébriques. Limites et continuité d'une application composée. Continuité des fonctions polynomiales sur  $\mathbb{R}^d$ .
- Étude de la continuité de fonctions réelles définies sur une partie de  $\mathbb{R}^d$ .

### II.2 Topologie dans $\mathbb{R}^d$

- Complétude.
- Suites de Cauchy dans un espace vectoriel normé; toute suite convergente est de Cauchy. Définition d'un espace vectoriel normé complet (**espace de Banach**).  $\mathbb{R}^d$  est complet. Théorème de prolongement d'une application lipschitzienne.
- Compacité.
- Valeur d'adhérence d'une suite; définition d'une partie (séquentiellement) compacte d'un espace vectoriel normé; toute partie compacte est fermée et bornée; toute partie fermée d'une partie compacte est compacte. Le produit d'une famille finie de compacts est un compact. Image d'un compact par une application continue. Théorème de Bolzano-Weierstrass: toute suite bornée à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  possède une valeur d'adhérence; pour qu'une partie de  $\mathbb{R}^d$  soit compacte, il suffit qu'elle soit fermée et bornée.
- Connexité par arcs.
- Chemin à valeurs dans un espace vectoriel normé; définition d'une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé; une partie convexe est connexe par arcs. Image d'un connexe par arcs par une application

continue. Théorème des valeurs intermédiaires : toute partie connexe par arcs de  $\mathbb{R}$  est un intervalle. Composantes connexes d'un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ .

– Normes équivalentes ; des normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes, les mêmes ouverts et les mêmes suites de Cauchy. Toutes les normes sur  $\mathbb{R}^d$  sont équivalentes. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet ; extension du théorème de Bolzano-Weierstrass.

### II.3 Séries dans un espace de Banach

– Série convergente à termes dans un espace vectoriel normé. Condition de Cauchy. Série absolument convergente ; toute série absolument convergente à termes dans un espace de Banach est convergente.

– Une série absolument convergente à termes dans un espace de Banach est commutativement convergente. Famille dénombrable absolument sommable à valeurs dans un espace de Banach, somme d'une famille absolument sommable. Inégalité triangulaire. Sommation par paquets ; critère suffisant d'absolue sommabilité. Exemple des suites doubles absolument sommables.

– Algèbre normée, de Banach. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. Série de Neumann ; application à la localisation du spectre d'une matrice ; le groupe  $\mathbb{U}$  des éléments inversibles d'une algèbre de Banach  $\mathbb{A}$  est ouvert ; continuité sur  $\mathbb{U}$  de l'application  $a \rightarrow a^{-1}$ . Application exponentielle  $\exp$  dans une algèbre de Banach  $\mathbb{A}$  ; si  $a$  et  $b$  commutent dans  $\mathbb{A}$ , alors  $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$ .

### II.4 Normes subordonnées

– Caractérisation de la continuité d'une application linéaire d'un espace vectoriel normé  $E$  dans un espace vectoriel normé  $F$  ; si  $E$  est de dimension finie, toute application linéaire de  $E$  dans  $F$  est continue. Norme subordonnée sur l'espace vectoriel  $\mathcal{L}_c(E; F)$  des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ . Propriété de sous-multiplicativité.

– Normes sur  $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{K}) \simeq (\mathbb{K}^d)^*$  subordonnées aux normes  $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1$  sur  $M_{d,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^d$ , où  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ; normes sur  $\mathcal{M}_d(\mathbb{K}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{K}^d)$  subordonnées aux normes  $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1$  sur  $M_{d,1}(\mathbb{K})$  ; la norme  $\|\cdot\|_2$  sur  $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$  est sous-multiplicative et majore la norme  $\|\cdot\|_2$  subordonnée à la norme  $\|\cdot\|_2$  sur  $M_{d,1}(\mathbb{K})$  ;  $\sqrt{\|A^*A\|_2} = \|A\|_2 = \|A^*\|_2$  pour  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ .

– Caractérisation de la continuité d'une application bilinéaire ; si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, toute application bilinéaire définie sur  $E \times F$  est continue.

## III Théorie de la réduction

### III.1 Outils d'algèbre générale

Arithmétique des entiers et des polynômes

– Idéal d'un anneau commutatif  $A$  somme et intersection d'idéaux de  $A$ , noyau d'un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow B$ . Idéal principal.

– Idéaux de  $\mathbb{Z}$  ; caractérisation du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de deux entiers, théorème de Bézout. Relation de congruence modulo un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  ; anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , morphisme canonique de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Caractérisation des éléments inversibles de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ; fonction indicatrice d'Euler  $\Phi$  ; théorème chinois.

– Idéaux de l'anneau des polynômes  $\mathbb{K}[X]$ , où  $\mathbb{K}$  est égal à  $\mathbb{R}$  ou à  $\mathbb{C}$  ; caractérisation du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de deux polynômes, théorème de Bézout. Morphisme d'algèbres  $\mathbb{K}[X] \rightarrow A$ ,  $\varphi \rightarrow \varphi(a)$  où  $A$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre avec unité et  $a$  un élément de  $A$ , idéal des polynômes annulateurs de  $a$ , sous-algèbre  $\mathbb{K}[a]$  de  $A$ . Polynôme minimal  $\pi_a$  d'un élément  $a$  de  $A$  admettant un polynôme annulateur non nul ;  $a$  admet un polynôme annulateur non nul si et seulement si  $\mathbb{K}[a]$  est de dimension finie, auquel cas  $\dim \mathbb{K}[a] = \deg \pi_a$ .

### III.2 Réduction des endomorphismes

– Sous-espace vectoriel  $F$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  stable par un endomorphisme  $u$  de  $E$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ), endomorphisme  $u_F$  de  $F$  induit par  $u$ . Somme et intersection de sous-espaces  $u$ -stables. Si  $v$  est un endomorphisme de  $E$  commutant avec  $u$ ,  $\ker v$  et  $\text{Im } v$  sont  $u$ -stables. En dimension finie, caractérisation des endomorphismes stabilisant un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  par leur matrice dans une base de  $E$  adaptée

à  $F$ ; caractérisation des endomorphismes stabilisant des sous-espaces vectoriels  $F_1, \dots, F_s$  de  $E$  tels que  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_s$  par leur matrice dans une base de  $E$  adaptée à la décomposition de  $E$ .

– Théorème de décomposition des noyaux.

– Existence du polynôme minimal  $\pi_u$  de  $u$  en dimension finie; polynôme minimal d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ . Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , il existe une droite  $u$ -stable de  $E$ ; si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , il existe une droite ou un plan  $u$ -stable de  $E$ .

Le polynôme minimal d'une matrice triangulaire par blocs  $\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$  est un multiple de  $\pi_A$  et de  $\pi_B$  et un diviseur du produit de  $\pi_A$  et  $\pi_B$ . Le polynôme minimal de  $u$  est de degré inférieur ou égal à  $\dim E$ .

– Polynôme caractéristique  $\chi_A$  d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ ; une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique; le polynôme caractéristique est un invariant de similitude; en dimension finie, polynôme caractéristique  $\chi_u$  d'un endomorphisme  $u$  de  $E$ . Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs  $\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$  est égal au produit de  $\chi_A$  et  $\chi_B$ . Théorème de Cayley-Hamilton.

– Vecteur propre, valeur propre de  $u$ ; sous-espace propre de  $u$  associé à une valeur propre. Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux sont en somme directe. Les valeurs propres de  $u$  sont racines de tout polynôme annulateur de  $u$ . En dimension finie, les racines des polynômes  $\pi_u$  et  $\chi_u$  sont les valeurs propres de  $u$ ; multiplicité d'une valeur propre  $\lambda$  de  $u$ ; si le polynôme caractéristique  $\chi_u$  est scindé, la somme et le produit des valeurs propres de  $u$  comptées avec leur multiplicité sont égaux à la trace et au déterminant de  $u$  respectivement; le sous-espace propre associé à une valeur propre  $\lambda$  est de dimension inférieure ou égale à la multiplicité de  $\lambda$ .

– Endomorphisme trigonalisable en dimension finie, matrice carrée trigonalisable. Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est trigonalisable si et seulement son polynôme caractéristique est scindé. Toute matrice dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable. Endomorphisme nilpotent; un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable de spectre nul.

– Endomorphisme diagonalisable en dimension finie, matrice carrée diagonalisable. Famille  $(p_1, \dots, p_s)$  des projecteurs associés à une décomposition de  $E$  de la forme  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_s$ ; décomposition spectrale d'un endomorphisme diagonalisable  $u$  dont les sous-espaces propres sont  $F_1, \dots, F_s$ :  $u = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_s p_s$ ; pour tout  $\varphi \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\varphi(u) = \varphi(\lambda_1)p_1 + \dots + \varphi(\lambda_s)p_s$ . Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité: la somme des sous-espaces propres de  $u$  est égale à  $E$ ; le polynôme caractéristique est scindé et la dimension de tout sous-espace propre de  $u$  est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante; il existe un polynôme annulateur de  $u$  scindé à racines simples.

## IV Calcul différentiel

### IV.1 Fonctions de plusieurs variables réelles

– Dérivabilité d'une application  $f$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans un espace de Banach en un point  $a$  de  $I$ ; espace vectoriel  $C^k(I; E)$  avec  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ . Formule de Leibniz générale. Inégalité des accroissements finis. Théorème de prolongement d'une application dérivable. Formule de Taylor avec reste sous forme intégrale, Inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.

– Différentiabilité d'une application  $f$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  en un point  $a$  de  $U$ , différentielle  $df(a)$  (ou  $df_a, Df(a), f'(a)$ ) de  $f$  en  $a$ ; dérivée  $D_v f(a)$  de  $f$  en  $a$  suivant un vecteur non nul  $v \in \mathbb{R}^n$ , dérivées partielles, matrice jacobienne; composition d'applications différentiables; vecteur tangent à l'image par  $f$  d'un chemin de classe  $C^1$  dans  $U$  passant par  $a$ .

– Espace vectoriel  $C^1(U; \mathbb{R}^p)$ , caractérisation des applications de classe  $C^1$ .

– Forme différentielle  $df$  d'une fonction  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ ; gradient de  $f$  relativement à la structure euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^n$ ; interprétation géométrique du gradient.

– Inégalité des accroissements finis dans un ouvert convexe; caractérisation des applications constantes sur un ouvert connexe par arcs; point critique (ou stationnaire).

– Espace vectoriel  $C^k(U; \mathbb{R}^p)$  avec  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ . Théorème de Schwarz.

### IV.2 Théorème des fonctions implicites

– Théorème des fonctions implicites pour une fonction de classe  $C^k$  à valeurs réelles.

– Théorème d'inversion locale, caractérisation d'un  $C^k$ -difféomorphisme global.

### IV.3 Extrema des fonctions réelles

- Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction à valeurs réelles de classe  $C^2$ .
- Condition suffisante pour qu'un extremum local soit un minimum (ou un maximum) strict, cas particulier où  $n = 2$ , point col (ou selle).
- Extrema liés, multiplicateurs de Lagrange.

## V Suites et séries de fonctions

### V.1 Comparaison de suites et de fonctions numériques (rappels)

- Relations de comparaison, notations de Landau.
- Critère de comparaison de séries et d'intégrales absolument convergentes.
- Sommation et intégration des relations de comparaison.

### V.2 Suites et séries de fonctions

- Convergence simple d'une suite ou d'une série d'applications d'un ensemble  $X$  dans un espace vectoriel normé de dimension finie  $F$ .
- Convergence uniforme d'une suite ou d'une série d'applications de  $X$  dans  $F$ . Condition de Cauchy uniforme. Espace de Banach  $\mathcal{B}(X; F)$  des applications bornées de  $X$  dans  $F$  muni de la norme de la convergence uniforme. Critère suffisant d'uniforme convergence d'une série de fonctions : convergence normale. Condition nécessaire et suffisante pour qu'une série alternée de fonctions réelles soit uniformément convergente.
- Théorème d'interversion des limites dans le cas où  $X$  est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie ; continuité de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) uniformément convergente d'applications continues. Dans le cas où  $X$  est compact, espace de Banach  $\mathcal{C}(X; F)$  des applications continues de  $X$  dans  $F$  muni de la norme de la convergence uniforme.
- Dérivation de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) d'applications de classe  $C^1$  d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  dans  $F$  ; espace de Banach  $C^1([a, b]; F)$  muni de la norme  $f \rightarrow \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty)$ .
- *Approximation uniforme d'une application continue de  $[a, b]$  dans  $F$  par une fonction en escalier, par une fonction continue affine par morceaux.*
- *Espace de Banach  $L([a, b]; F)$  des applications réglées (normalisées) de  $[a, b]$  dans  $F$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  ; sous-espace vectoriel dense des fonctions en escalier (normalisées).*
- *Définition de l'intégrale sur  $L([a, b]; F)$ . Norme  $\|\cdot\|_1$  ; convergence en moyenne d'une suite ou d'une série d'applications réglées de  $[a, b]$  dans  $F$ . Inégalité de la moyenne ; comparaison des normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$  ; intégration sur  $[a, b]$  de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) de fonctions réglées.*
- *Espaces vectoriels normés  $L^\infty(I)$ ,  $L^1(I)$  et  $L^2(I)$  des fonctions réglées (normalisées) à valeurs complexes respectivement bornées, intégrables et de carré intégrable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .*
- *Théorème de convergence dominée d'Arzelà. Intégration de la la somme d'une série de fonctions réglées à valeurs complexes.*

### V.3 Séries entières

- Séries entières dans le domaine complexe.
- Rayon, disque (ouvert) de convergence d'une série entière à coefficients complexes. Lemme d'Abel : une série entière de disque de convergence  $D$  est normalement convergente sur tout compact de  $D$  ; la somme de la série entière est continue sur  $D$ . Inégalités de Cauchy. Série entière dérivée.
- Séries entières dans le domaine réel.
- Intervalle (ouvert) de convergence d'une série entière ; la somme de la série entière d'intervalle de convergence  $I$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I$  ; théorème de dérivation terme à terme. Fonction  $f$  à valeurs complexes définie sur un intervalle  $I$  développable en série entière en un point  $a$  de  $I$  ; développement de Taylor. Développements de Taylor usuels.

## VI Algèbre bilinéaire

- Espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F; K)$  des formes bilinéaires sur  $E \times F$  ;  $\mathcal{L}(E, F; K)$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{L}(F; E^*)$ . En dimension finie, matrice d'une forme bilinéaire, formule de changement de bases.

– Forme bilinéaire symétrique, forme quadratique sur  $E$  ; identités de polarisation ; notion d'orthogonalité dans un espace vectoriel  $E$  muni d'une forme quadratique. En dimension finie, rang d'une forme quadratique  $q$  sur  $E$  (ou de forme bilinéaire symétrique associée) ; une forme quadratique  $q$  non dégénérée induit un isomorphisme canonique de  $E$  sur  $E^*$  ; existence d'une base  $q$ -orthogonale ; algorithme de Gauss pour la décomposition en carrés d'une forme quadratique.

– Décomposition en carrés d'une forme quadratique  $q$  sur  $\mathbb{R}^p$ . Théorème d'inertie de Sylvester, signature d'une forme quadratique.

## VII Produits scalaires, espaces euclidiens

– *Produits scalaires.*

Produit scalaire réel ou complexe (dans le cas complexe, linéaire à droite, semi-linéaire à gauche) ; espace préhilbertien réel ou complexe  $E$ . Inégalité de Cauchy-Schwarz, norme et distance sur  $E$  ; identités de polarisation ; identité du parallélogramme. Famille orthogonale, orthonormale de vecteurs ; théorème de Pythagore. Orthogonalisation d'une suite libre de vecteurs : algorithme de Gram-Schmidt. Orthogonal  $F^\perp$  (ou  $F^\circ$ ) d'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  ; sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux, projecteur orthogonal ; tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal. Existence d'une base orthonormale si  $E$  est de dimension finie (euclidien ou hermitien), complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.

– *Espaces euclidiens.*

Isomorphisme canonique d'un espace euclidien  $E$  de dimension  $n$  sur son dual  $E^*$ . Adjoint  $u^*$  d'un endomorphisme  $u$  de  $E$ , noyau et image de  $u^*$ , matrice de  $u^*$  dans une base orthonormale. Endomorphisme symétrique (ou autoadjoint), antisymétrique ; caractérisation des projecteurs autoadjoints. Automorphisme orthogonal ; symétrie orthogonale, réflexion ; groupe orthogonal  $O(E)$  ; rotation de  $E$ , groupe spécial orthogonal  $SO(E)$  ; groupes  $O(n)$  et  $SO(n)$ . Matrice de Gram  $G$  d'une famille  $(v_1, \dots, v_p)$  d'éléments de  $E$  ;  $G = {}^t AA$  où  $A$  est la matrice de  $(v_1, \dots, v_p)$  dans une base orthonormale de  $E$  ;  $rg(G) = rg(v_1, \dots, v_p)$  ; déterminant de Gram  $\det G$  de  $(v_1, \dots, v_p)$ , interprétation géométrique de  $\sqrt{|\det G|}$  ; meilleure solution approchée au sens quadratique du système d'équations linéaires  $AX = B$ , avec  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , dans le cas où  $rg(A) = p$ . Matrice symétrique positive, définie positive ; une matrice symétrique  $G$  est définie positive si et seulement si elle est la matrice de Gram d'une base de  $E$  ; factorisation  $QR$  d'une matrice inversible dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , factorisation de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

– Dans le cas où  $E$  est euclidien, un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est  $u$ -stable si et seulement si  $F^\perp$  est  $u^*$ -stable.

– Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien  $E$  est diagonalisable dans une base orthonormale ; toute matrice carrée symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable. Réduction d'une forme quadratique sur  $E$  dans une base orthonormale. Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint positif, défini positif ; décomposition polaire d'un endomorphisme inversible de  $E$ .

## VIII Séries de Fourier

– Premier et second théorèmes d'approximation polynomiale de Weierstrass.

– Espace de Hilbert réel ou complexe ; espace de Hilbert  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Meilleure approximation dans  $F$  d'un élément de  $H$ , projecteur orthogonal d'image  $F$  ; inégalité de Bessel. Base hilbertienne (ou famille orthonormale totale) de  $H$  ; famille des coefficients de Fourier d'un élément de  $H$  relativement à une base hilbertienne de  $H$  ; formule de Parseval.

– Polynôme trigonométrique, série trigonométrique ; famille  $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $n \mapsto c_n(f)$  des coefficients de Fourier d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  réglée  $2\pi$ -périodique, série de Fourier de  $f$  ; suites des coefficients de Fourier  $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Série de Fourier d'une fonction paire, impaire. Relation entre  $\hat{f}$  et  $\hat{f}'$  si  $f$  est continue et de classe  $C^1$  par morceaux.

– Espace préhilbertien  $\mathcal{L}(\mathbb{T})$  des fonctions réglées normalisées  $2\pi$ -périodiques sur  $\mathbb{R}$  à valeurs complexes. Inégalité de Bessel. La famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , où  $e_n$  désigne la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $e_n(t) = e^{int}$ , est une base hilbertienne de  $\mathcal{L}(\mathbb{T})$  ; la série de Fourier d'une fonction  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$  converge en moyenne quadratique vers  $f$  ; formule de Parseval.

– Série trigonométrique normalement convergente. Si une fonction  $2\pi$ -périodique  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est continue et de classe  $C^1$  par morceaux, alors la série de Fourier de  $f$  converge normalement vers  $f$ .

– Théorème de Dirichlet : si une fonction  $2\pi$ -périodique  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $C^1$  par morceaux, alors la série de Fourier de  $f$  converge simplement vers la fonction :  $t \mapsto \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$ .

## IX Équations différentielles

### IX.1 Équations différentielles non linéaires

– Systèmes différentiels autonomes du premier ordre en dimension 2.

Courbe intégrale  $\gamma$  d'un champ de vecteurs  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ; interprétation cinématique ; courbe intégrale maximale ; système différentiel autonome du premier ordre associé. Invariance par translation des temps. Problème de Cauchy associé à la condition initiale  $\gamma(0) = (x_0, y_0)$  avec  $(x_0, y_0) \in U$ . Théorème de Cauchy : existence et unicité locale d'une solution du problème de Cauchy. Existence et unicité d'une solution maximale  $\gamma_{\max} : ]\omega^-, \omega^+[ \rightarrow U$  du problème de Cauchy ; toute solution du problème de Cauchy est la restriction de  $\gamma_{\max}$  à un sous-intervalle de  $] \omega^-, \omega^+ [$ . Les images des courbes intégrales maximales (ou orbites) de  $v$  forment une partition de  $U$ .

– Équations différentielles scalaires du premier ordre.

Solution d'une équation  $y' = f(x, y)$ , où  $f$  est une application de classe  $C^1$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  ; solution maximale, maximale à droite. Problème de Cauchy associé à la condition initiale  $y(x_0) = y_0$  avec  $(x_0, y_0) \in U$  ; problème de Cauchy équivalent associé au champ de vecteurs  $v = (1, f)$  sur  $U$ . Théorème de Cauchy : existence et unicité locale des solutions du problème de Cauchy. Existence et unicité d'une solution maximale  $\gamma_{\max} : ]\omega^-, \omega^+[ \rightarrow \mathbb{R}$  du problème de Cauchy ; toute solution du problème de Cauchy est la restriction de  $\gamma_{\max}$  à un sous-intervalle de  $] \omega^-, \omega^+ [$ . Condition nécessaire pour qu'une solution de l'équation  $y' = f(x, y)$  soit maximale à droite dans le cas où  $U = I \times \mathbb{R}$ ,  $I$  étant un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  ; définition d'une solution globale.

– Équations différentielles à variables séparables.

Étude du problème de Cauchy pour une équation de la forme  $y' = f(x)g(y)$ , où  $f$  et  $g$  sont des fonctions réelles continues définies sur des intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  ; solutions singulières. Équations différentielles homogènes.

### IX.2 Équations différentielles linéaires

– Systèmes différentiels linéaires du premier ordre.

Solution du système différentiel linéaire  $X' = AX + B$ , où  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  sont des applications continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  ; solution globale. Théorème de Cauchy : existence et unicité d'une solution globale du problème de Cauchy, unicité locale des solutions. Système différentiel linéaire homogène  $X' = AX$  associé ; structure de l'ensemble des solutions. Cas des systèmes différentiels réels. Système fondamental de solutions du système différentiel  $X' = AX$ , matrice fondamentale, wronskien, formule de Liouville. Méthode de la variation des constantes.

– Systèmes différentiels linéaires autonomes du premier ordre.

Résolution du système différentiel linéaire  $X' = AX + B$ , où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ , par trigonalisation de  $A$ . Matrice fondamentale  $t \mapsto \exp(tA)$ , solution  $t \mapsto \exp((t - t_0)A)X_0$  du problème de Cauchy associé à la condition initiale  $X(t_0) = X_0$ . Exemples de calcul de  $\exp(A)$  ; déterminant de  $\exp(A)$ . Interprétation d'un endomorphisme  $v$  d'un espace vectoriel réel ou complexe  $E$  de dimension finie comme un champ de vecteurs linéaire sur  $E$  ; expression intrinsèque d'un système différentiel linéaire homogène autonome du premier ordre. Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $v$  et si  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow E$  est une courbe intégrale du champ de vecteurs  $v$  passant par un point de  $F$ , alors l'image  $\gamma(\mathbb{R})$  de  $\gamma$  est contenue dans  $F$  ; application au cas où  $v$  est diagonalisable.

– Équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre à coefficients variables.

Problème de Cauchy pour une équation de la forme  $x'' + ax' + bx = c$  où  $a, b$  et  $c$  sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  : existence et unicité d'une solution globale, unicité des solutions. Structure de l'ensemble des solutions. Système fondamental de solutions de l'équation homogène  $x'' + ax' + bx = 0$ , wronskien. Méthode de la variation des constantes, condition de Lagrange. Réduction de l'équation homogène connaissant une solution ne s'annulant pas.

## X Courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

– Courbe paramétrée ou chemin  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^k$  avec  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  dans  $\mathbb{R}^d$ ; changement de paramétrage, chemins  $C^k$ -équivalents,  $C^k$ -équivalents avec même orientation. Chemin de classe  $C^k$  par morceaux. Chemin fini, simple. Point régulier  $t^0 \in I$  de  $\gamma$ , vecteur tangent  $\gamma'(t_0)$ ; chemin régulier. Deux chemins finis, simples et réguliers de classe  $C^k$  dans  $\mathbb{R}^d$  sont  $C^k$ -équivalents si et seulement s'ils ont même image.

– Courbe régulière  $C$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par une équation de la forme  $f(x, y) = 0$  où  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  à valeurs réelles définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , sans point critique sur  $C$ . Existence d'un paramétrage local de  $C$  en tout point  $a$  de  $C$ . Vecteur tangent à  $C$  en  $a$ , ensemble  $T_a C$  des vecteurs tangents à  $C$  en  $a$ ;  $T_a C$  est le noyau de la différentielle de  $f$  en  $a$ , équation de la droite tangente  $a + T_a C$  à  $C$  en  $a$ .

– Surface paramétrée dans  $\mathbb{R}^3$ , point régulier, plan tangent, normale.

– Surface régulière  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par une équation de la forme  $f(x, y, z) = 0$  où  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  à valeurs réelles définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , sans point critique sur  $S$ . Existence d'un paramétrage local de  $S$  en tout point  $a$  de  $C$ . Vecteur tangent à  $S$  en  $a$ , ensemble  $T_a S$  des vecteurs tangents à  $S$  en  $a$ ;  $T_a S$  est le noyau de la différentielle de  $f$  en  $a$ , équation du plan tangent  $a + T_a S$  à  $S$  en  $a$ ; normale à  $S$  en  $a$ .

– Réduction d'une fonction polynomiale de degré 2 sur  $\mathbb{R}^2$  et sur  $\mathbb{R}^3$ ; équation réduite des coniques dans le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  et des quadriques dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ .

## XI Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$

– Rotations et réflexions linéaires de  $\mathbb{R}^2$ ; morphisme de groupe canonique de  $\mathbb{R}$  sur  $SO(2)$ . Tout déplacement de  $\mathbb{R}^2$  est soit une translation, soit une rotation affine.

– Rotations, symétries orthogonales, réflexions linéaires. Rotation  $r_{e,\theta}$ , d'axe porté et orienté par un vecteur unitaire  $e$  et d'angle orienté  $\theta$ ; interprétation géométrique de la formule de Rodrigues  $r_{e,\theta} = \exp(\theta a_e)$  où  $a_e$  est l'endomorphisme  $v \longmapsto e \times v$  de  $\mathbb{R}^3$ ; théorème d'Euler, détermination de l'axe et de l'angle orientés d'une rotation donnée par sa matrice dans la base canonique. Tout déplacement de  $\mathbb{R}^3$  est soit une translation, soit une rotation affine, soit un vissage.

– Abscisses curvilignes associées à un chemin de classe  $C^1$  dans  $\mathbb{R}^2$  ou dans  $\mathbb{R}^3$ , longueur d'un chemin fini, chemin normal; tout chemin régulier de classe  $C^k$  est  $C^k$ -équivalent à un chemin normal.

– Repère de Frenet associé à une courbe paramétrée de classe  $C^2$  régulière dans le plan euclidien orienté  $\mathbb{R}^2$ ; formules de Frenet, courbure, rayon de courbure en un point birégulier.

– Repère de Frenet associé à une courbe paramétrée de classe  $C^3$  birégulière dans l'espace euclidien orienté  $\mathbb{R}^3$ ; formules de Frenet, courbure, torsion, plan osculateur.

## XII Intégrales avec paramètre

– Continuité, dérivation d'une fonction définie par une intégrale sur un segment avec paramètre.

– \* Continuité, dérivation d'une fonction définie par une intégrale avec paramètre : théorèmes dérivant du théorème de convergence dominée. \*

– Fonction  $\Gamma$  sur la demi-droite  $]0, \infty[$  : intégrale eulérienne de seconde espèce, équation fonctionnelle, variations, convexité logarithmique, \* formule d'Euler-Gauss,  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  (intégrale de Gauss), formule de Stirling. \*

– \* Transformée de Laplace  $Lf$  d'une fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux, causale et vérifiant une estimation de la forme  $|f(t)| \leq Ce^{at}$  avec  $C \in \mathbb{R}^+$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ;  $Lf$  est définie et holomorphe dans le demi-plan  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > a\}$ . Transformée de Laplace des fonctions  $t \longmapsto Y(t)t^n e^{ct}$  avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $c \in \mathbb{C}$ ,  $t \longmapsto Y(t) \cos \omega t$ ,  $t \longmapsto Y(t) \sin \omega t$ ,  $t \longmapsto Y(t) \cosh \omega t$ ,  $t \longmapsto Y(t) \sinh \omega t$  avec  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $t \longmapsto Y(t)t^\nu$  avec  $\nu \in \mathbb{R}^+$ , où  $Y$  est la fonction

de Heaviside. Transformée de Laplace de  $t \longmapsto e^{ct} f(t)$  avec  $c \in \mathbb{C}$ ,  $t \longmapsto f(t - \tau)$  avec  $\tau \in \mathbb{R}^+$ ,  $t \longmapsto f(\lambda t)$  avec  $\lambda > 0$ ; transformée de Laplace d'une fonction de classe  $C^k$  par morceaux; transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions.

### XIII Forme différentielle de degré 1

- Forme différentielle de degré 1,  $\omega$  de classe  $C^k$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^d$ , avec  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .
- Primitive sur  $U$  d'une 1-forme différentielle  $\omega$  continue; 1-forme différentielle exacte. Intégrale d'une 1-forme différentielle continue suivant un chemin fini  $\gamma$  dans  $U$  de classe  $C^1$  par morceaux. Une 1-forme continue  $\omega$  est exacte si et seulement si l'intégrale de  $\omega$  suivant tout lacet dans  $U$  est nulle.
- 1-forme différentielle de classe  $C^1$  fermée. Lemme de Poincaré : toute 1-forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé est exacte.
- Champ de vecteurs  $X$  sur  $U$  associé à une 1-forme différentielle  $\omega$  continue moyennant la structure euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^d$ . Circulation de  $X$  suivant un chemin fini  $\gamma$  dans  $U$  de classe  $C^1$  par morceaux.
- Une application de classe  $C^1 : z \mapsto f(z) = p(x, y) + iq(x, y)$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  est une fonction holomorphe si et seulement si les 1-formes différentielles  $pdx - qdy$  et  $qdx + pdy$  sont fermées. Primitive sur un ouvert  $U$  d'une fonction holomorphe; si l'ouvert  $U$  est étoilé, toute fonction holomorphe sur  $U$  admet une primitive sur  $U$ .
- Définition du logarithme principal  $\text{Log}$  sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ ; pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ ,  $\text{Log}(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$ ; développement en série entière de  $\text{Log}(1+z)$ . L'argument principal est une primitive sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  de la 1-forme différentielle  $(x^2 + y^2)^{-1}(xdy - ydx)$ . Théorème de relèvement d'un chemin de classe  $C^k$  dans  $\mathbb{C}^*$ , avec  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ .

### XIV Intégrales multiples, aires et volumes

- Formule de Fubini.
- Domaine élémentaire, simple du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ . Intégrale sur un domaine simple  $D$  d'une fonction continue  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ; aire de  $D$ . Formule de changement de variables. Formule de Green sur un domaine élémentaire.
- Extension aux intégrales triples

### XV Fonctions holomorphes

- Dérivation complexe, fonction holomorphe sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ . Équations de Cauchy-Riemann. Fonction analytique sur  $U$ ; toute fonction analytique sur  $U$  est holomorphe. Fonctions holomorphes usuelles.
- Développement de Taylor en un point d'une fonction holomorphe; toute fonction holomorphe sur  $U$  est développable en série entière dans tout disque ouvert contenu dans  $U$ .
- Principe des zéros isolés.