# Intégrabilité sur un intervalle quelconque

Dans toute la suite $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrêmités $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On considère des fonctions définies sur $I$ à valeur dans $\mathbb{R}^d$, continues par morceaux, de sorte que pour tout segment $[\alpha, \beta] \subset I$, l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t$ soit définie. Dans la suite, on se propose de généraliser la notion d'intégrale et d'intégrabilité à un intervalle $I$ quelconque.

## 1 Définitions – Exemples

**Définition 1** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue par morceaux et $F$ une primitive de $f$ sur $I$ ($F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$ pour un $x_0$ fixé dans $I$). On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$ et*



*$\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ existent dans $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, on pose*

$$\int_I f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

*Si non on dit que l'intégrale est divergente.*

**Proposition 1** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $t \longmapsto (f_1(t), ..., f_d(t))$ continue par morceaux. $\int_I f$ est convergente si et seulement si $\int_I f_i$ est convergente pour tout $i \in [\![1, d]\!]$. Et dans le cas convergence, on a*

$$\int_I f = \left(\int_I f_1, ..., \int_I f_d\right).$$

- Par linéarité de l'intégrale, les combinaisons linéaires concervent la convergence :



**Proposition 2** *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continues par morceaux. Si les intégrales $\int_I f$ et $\int_I g$ sont convergentes alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_I (\alpha f + \beta g)$ est convergente et*

$$\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$$

**Remarques**

(1) Si $I = ]a, b[$ , on montre facilement que $\int_I f$ converge si et seulement si pour tout $c \in I$, $\int_{]a,c]} f$ et $\int_{[a,b[} f$ convergent. On se limitera dans la suite à des inter-



valles du type $[a, b[$ , dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) Si $f : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue par morceaux prolongeable par continuité en $b \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente. Il s'agit en fait d'intégrale sur le ségment $[a, b]$ .

(3) Si $f : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue par morceaux. On a problème d'intégation de $f$ sur $I$ dans l'un des cas suivant :
- $b = +\infty$.
- $b \in \mathbb{R}$ mais $f$ n'est pas bornée au voisinage de $b$.

ou les deux en même temps.



**Exercice 1** *Montrer que si $f : [a, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est divergente.*

**Exemples**

**1. Intégrales de Riemann :** Il s'agit des intégrales de la forme

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ ou } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$, et dans



ce cas

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$, et dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

**2.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{at}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{a}e^{at}\right]_0^{+\infty}$ est convergente si et seulement si $a < 0$ et dans cas $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{at}\mathrm{d}t = -\frac{1}{a}$.



**3.** $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t = [x\ln(x) - x]_0^1 = -1$, mais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(t)\mathrm{d}t$ diverge.

**Cas de fonctions positives**

**Théorème 1** *Soit $f : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux **positive**. L'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convegente si et seulement si la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$ . Dans ce cas*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sup_{x\in[a,b[} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

**En effet:** La fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est alors croissante.




seddoug@medianesup.com

**Théorème 2 (Critère de Cauchy)** *Soit $f : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue par morceaux. L'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convegente si et seulement si la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ vérifie le critère de Cauchy au voisinage de $b$, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in [a, b[ \text{ tel que}$$
$$\forall x, y \in [A, b[ : \left|\int_x^y f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon$$

## 2 Intégrales absolument convergentes

**Définition 2** *Soit $f : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convegente si $\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$*

8

*est convergente.*

**Théorème 3** *Toute intégrale absolument convergente est convergente, et dans ce cas*

$$\left\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

**Preuve:** Utiliser le critère de Cauchy et l'inégalité triangulaire.

**Définition 3** *On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue par morceaux est **intégrable** ou **sommable** sur $I$ si l'intégrale $\int_I f$ est absolument convergente.*

9

On note $\mathcal{L}^1\left(I, \mathbb{R}^d\right)$ l'ensemble des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continues par morceaux telles que l'integrale

$$\|f\|_1 = \int_I \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \text{ soit convergente.}$$

**Théorème 4** *$\mathcal{L}^1\left(I, \mathbb{R}^d\right)$ est un $\mathbb{R}-ev$. L'application $f \longmapsto \|f\|_1$ est une semi norme sur $\mathcal{L}^1\left(I, \mathbb{R}^d\right)$.*

**Théorème 5 (Inégalité de la moyenne)** *Soient $f : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux **bornée**, $g : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}^d$, continue*

10

*par morceaux **intégrable** alors $fg$ est intégrable sur $[a, b[$ et*

$$\left\|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right\| \leq \sup_{t\in[a,b[} |f(t)| \int_a^b \|g(t)\|\,\mathrm{d}t$$

**Fonctions à carré intégrable**

On note $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(I)$ l'ensemble des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continues par morceaux telles que l'integrale

$$(\|f\|_2)^2 = \int_I |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \text{ soit convergente.}$$

**Théorème 6** *$\mathcal{L}^2(I, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$ (et $\mathbb{C}$)$-ev$. L'application $f \longmapsto$*

11

*$\|f\|_2$ est une semi norme sur $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{C})$ qui vérifie en plus*

$$\forall f, g \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{C}),\ fg \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{C}) \text{ et}$$
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2\,\|g\|_2 \quad \textit{(Inégalité de Cauchy Schwarz)}$$

## 3 Calcul d'intégrales généralisées

**intégration par parties**

La méthode d'intégration par parties basée sur la formule de dérivation d'un produit reste valable.

**Théorème 7** *Soient $f, g : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux*

12

*telles que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)g(x)$ existe dans $\mathbb{C}$. Alors les deux intégrales*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$$

*sont de même nature et dans le cas de convergence, on a*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

- L'intégration par parties permet de ramener, le calcul d'une intégrale semi convergente à une autre absolument convergente.

13

**Exemple 1** *Pour l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ :*

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} (1-\cos t)'\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

*l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$ étant absolument convergente.*

**Exercice 2** *Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ est divergente.*

14

**Indication:** minorer les quantités $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$.

**Intégration par changement de variable**

**Théorème 8** *Soient $f : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ (par morceaux) bijective (strictement monotone). Alors les deux intégrales*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \text{ et } \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x$$

*sont de même nature et dans le cas de convergence, on a*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x$$

15

## 4 Principe de comparaison

**Comparaison de base**

**Théorème 9** *Soient $f, g : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux **positives** telles que*

$$f \leq g \text{ sur un voisinage de } b.$$

*Si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.*

**En effet:** dans ces conditions pour tout $x \in [a, b[$,

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

16

**Exemple 2** *$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{|\sin(x)| + x^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente.*

**comparaison asymptôtique**

**Théorème 10** *Soient $f, g : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux **positives** telles que*

- *Si $f(x) \underset{x \to b^-}{\sim} g(x)$ alors $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature. En plus,*
  - *Dans le cas de **convergence***

$$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \underset{x \to b^-}{\sim} \int_x^b g(t)\mathrm{d}t$$

17

- *Dans le cas de **divergence***

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x \to b^-}{\sim} \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

- *Si $f(x) \underset{x \to b^-}{=} O(g(x))$ (resp $o(g(x))$) alors*
  - *$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge implique que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge et*

$$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \underset{x \to b^-}{=} O\left(\int_x^b g(t)\mathrm{d}t\right) \text{ (resp } o\left(\int_x^b g(t)\mathrm{d}t\right)\text{)}$$

  - *$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge implique que $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge et*

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x \to b^-}{=} O\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right) \text{ (resp } o\left(\int_x^b g(t)\mathrm{d}t\right)\text{)}$$

18

**Preuve:** La faire en exercice.

**Exemple 3** *Toujours pour $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{|\sin(x)| + x^2}\mathrm{d}t$,*

$$\frac{|\cos(x)|}{|\sin(x)| + x^2} \underset{x \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

- Un moyen efficace pour l'étude de convergence est la comparaison avec les intégrales de Riemann :
  - Si $b = +\infty$ et $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge
  - Si $b \in \mathbb{R}$ et $f(t) \underset{t \to b^-}{=} O\left(\frac{1}{(b-t)^\alpha}\right)$ avec $\alpha < 1$, alors

19

$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

- Dans le cas de fonction quelconque, la méthode d'éclatement qui consiste à écrire un DAS de $f$ en $b$ (comme pour les séries) est très pratique.

**Exemple 4** *Pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} (x\sin(1/x) - 1)\,\mathrm{d}t$, on a :*

$$x\sin(1/x) - 1 \underset{x \to +\infty}{=} -\frac{1}{6}\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

*$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\mathrm{d}t$ convergente il en est de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} (x\sin(1/x) - 1)$*

20

## 5 Comparaison série intégrale

**Cas de fonctions réelles**

**Théorème 11** *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante. On pose $x_n = f(n)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. Alors :*

*(1) $\sum x_n$ converge si et seulement si $f$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.*

*(2) La suite $(u_n)$ définie par $u_n = S_n - \int_a^n f(t)\mathrm{d}t$ (et donc la série $\sum \left(\int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right)$) converge.*

*(3) Si $\sum x_n$ diverge alors $S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \int_a^n f(t)\mathrm{d}t$.*

21

**Preuve:** Pout tout $n \geq a + 2$ on a

$$x_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq x_n \leq \int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t.$$

Pour simplifier on suppose $a = 0$. En sommant les inégalités précédetes on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n+1} x_k \leq \int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \int_0^{n-1} f(t)\mathrm{d}t.$$

D'où (1).

Pour la suite $(u_n)$ on montre qu'elle décroit et minorée par zéro.

22

On a

$$u_{n+1} - u_n = x_{n+1} - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq 0.$$

Donc $(u_n)$ décroit. La minoration par $0$ est donnée par les inégalités plus haut.

Si $\sum x_n$ diverge alors $S_n$ tend vers $+\infty$ et donc $u_n = o(S_n)$ par suite $S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \int_a^n f(t)\mathrm{d}t$.

**Exercice 3** *Retrouver la convergence des séries de Riemann.*

**Remarque 1** *La série $\sum \sin(n\pi)$ converge pourtant la fonction $\sin(x.\pi)$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$. Qu'est ce qui manque ?*

23

**Cas de fonctions complexes**

**Théorème 12** *Soit $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f'$ soit intégrable sur $[0, +\infty[$. Posons $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$. Alors la série $\sum w_n$ est absolument convergente.*

**Preuve:** Une intégration par parties donne :

$$\int_{n-1}^{n} (t-n+1)f'(t)\mathrm{d}t = [(t-n+1)f(t)]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t = -w_n.$$

On déduit

$$|w_n| \leq \int_{n-1}^{n} (t-n+1)\,|f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

On conclut alors par comparaison des séries.



**Théorème 13** *Soit $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f$ et $f'$ soit intégrables sur $[0, +\infty[$. Alors la série $\sum f(n)$ est absolument convergente.*

**Preuve:** Dans ces conditions les séries $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ et $\sum w_n$ sont absolument convergentes il en est donc de même de $\sum f(n)$.

**Remarque 2** *dans le théorème le choix de $[0, +\infty[$ est juste pour commencer les indices à partir de zéro. On peut choisir un intervalle $[a, +\infty[$.*

**Exercice 4** *Etudier la convergence de la série $\sum \frac{\sin(\ln(n))}{n}$.*