Intégrales dépendant d'un paramètre

B. Seddoug

CPGE. Médiane Sup.

Dans ce petit chapitre, nous étudions des conditions de continuité et de dérivabilité de fonctions définies par une intégrale sur un intervalle quelconque.

1 Théorèmes généraux

- Dans cette section I est un intervalle de $\mathbb{R}$, A une partie de $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continue, telle que

$$\forall x \in A, \text{ la fonction } t \longmapsto f(x,t) \text{ est intégrable sur } I,$$

si I est un segment $[a,b]$ cette condition est vérifiée d'office.

1

- On définit sur A la fonction g par

$$\forall x \in A : g(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t.$$

On s'intéresse aux propriétés de g.

Continuité sous le signe $\int$

Théorème 1 *La fonction g est continue dans A, dans l'une ou l'autre des deux situations suivantes :*

(1) L'intervalle I est un segment $[a,b]$.

(2) f est à valeurs réelles ou complexes et il existe φ une fonction

2

continue positive intégrable sur I, telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I : |f(x,t)| \leq \varphi(t) \ \textit{hypothèse de domination.}$$

Preuve dans le cas (1): Pour $x \in A$, on montre que pour toute suite (x_n) qui converge vers x dans A, la suite $(g(x_n))$ converge vers $g(x)$.

L'ensemble

$$K = [\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}] \times [a,b]$$

est compact dans $A \times [a,b]$, par conséquent f (qui est continue) est uniformément continue sur K.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout x, x' dans K et pour tout t dans $[a,b]$, on a

$$\|x' - x\| \leq \eta \Longrightarrow \|f(x',t) - f(x,t)\| \leq \varepsilon$$

3

d'autre part il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$

$$\|x_n - x\| \leq \eta$$

On déduit donc que pour tout $n \geq N$

$$\begin{aligned} \|g(x_n) - g(x)\| &= \left\| \int_a^b f(x_n,t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \right\| \\ &\leq \int_a^b \|f(x_n,t) - f(x,t)\| \,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_a^b \varepsilon \mathrm{d}t = \varepsilon (b-a). \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure.

Dans le cas (2), la démonstration n'est pas exigible.

4

Remarque 1 *On déduit donc que l'application*

$$(u,v,x) \longmapsto \int_u^v f(x,t)\mathrm{d}t$$

est continue sur $I \times I \times A$, sous la seule hypothèse de continuité de f.

Remarque 2 *On a la même conclusion si on suppose seulement que l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie compacte contenue dans A.*

5

Dérivabilité sous le signe $\int$

Ici on suppose que A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et on suppose en plus que f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $A \times I$.

Théorème 2 *La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ dans A, et*

$$\forall x \in A : g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

dans l'une ou l'autre des deux situations suivantes :

(1) L'intervalle I est un segment $[a,b]$.

6

(2) f est à valeurs réelles ou complexes et il existe φ_0 et φ_1 deux fonctions continues positives intégrables sur I, telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I : |f(x,t)| \leq \varphi_0(t) \ \textit{et} \ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \varphi_1(t)$$

Preuve: Non exigible.

Remarque 3 *Par une récurrence facile, si f admet des dérivées jusqu'à l'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, continues sur $A \times I$, tel que I segment ou que toutes les dérivées de f vérifient l'hypothèse de domination alors g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A, et*

$$g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t.$$

7

Intégration sous le signe $\int$

Théorème 3 (formule de Fubini) *Lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que f est continue sur $A \times [a,b]$, alors pour tout segment $[c,d]$ inclus dans A :*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.$$

Preuve: Pour tout $(x,t) \in [c,d] \times [a,b]$ on pose

$$F(x,t) = \int_c^x f(u,t)\mathrm{d}u$$

8

F est continue sur $[c,d] \times [a,b]$ et admet comme dérivée partielle

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$$

continue sur $[c,d] \times [a,b]$. Donc

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} F(x,t)\mathrm{d}t = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b F(x,t)\mathrm{d}t$$

9

donc

$$\begin{aligned}\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x &= \left[\int_a^b F(x,t)\mathrm{d}t \right]_{x=c}^{x=d} \\ &= \int_a^b F(d,t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(u,t)\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

Exercice 1 (Transformée de Fourier) *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ conti-*

10

nue intégrable sur $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier de f est

$$\hat{f} : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ixt}\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Et la dérivabilité ?

2 Exemples

Fonction Γ

Théorème 4 *Pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction*

$$t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$$

11

est intégrable sur $]0,+\infty[$. La fonction

$$\Gamma : \left| \begin{array}{c}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve: Pour tout $x > 0$

$$e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} \text{ et } e^{-t}t^{x-1} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

12

Et sur tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$, on a :

$$0 \leq e^{-t}t^{x-1} \leq \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right) e^{-t}$$

la condition de domination est alors vérifiée sur tout compact inclus dans $]0,+\infty[$. On conclut donc que Γ est continue.

Pour montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout tout $k \in \mathbb{N}^*$, on procède de la même façon avec la fonction

$$\left| \frac{\partial\left(e^{-t}t^{x-1}\right)}{\partial x} \right| = \left| (\ln t)^k e^{-t}t^{x-1} \right|.$$

Proposition 1 *Pour tout $x \in]0,+\infty[$:*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

13

en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(n+1) = n!$$

et

$$\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Preuve: D'abord

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$$

À l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\int e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}t^x\right] + x\int e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$$

14

ce qui donne le résultat, par passage aux limites sur x. On déduit par récurrence que $\Gamma(n+1) = n!$.

Enfin par continuité de Γ et $\Gamma(1) = 1$, on a

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Proposition 2

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Preuve: A partir de l'intégrale de Gauss

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

15

et à l'aide du changement de variable $u = t^2$, on a $\mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t$ et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{-1/2}\mathrm{d}t.$$

Proposition 3 (Formule de Stirling)

$$\Gamma(x+1) = \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} \text{ et donc } n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Preuve: On considère le changement de variable $s = \dfrac{t-x}{\sqrt{x}}$ donc $\sqrt{x}\mathrm{d}s = \mathrm{d}t$, on a alors

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\alpha(x,s)}\mathrm{d}s$$

16

où $\alpha(x,s) = x\ln\left(1+\dfrac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}$. Les inégalités

$$\forall s \in \left]-\sqrt{x}, 0\right] : \quad \alpha(x,s) \leq -\frac{s^2}{2}$$

et

$$\forall s \geq 0, \forall x \geq 1 : \alpha(x,s) \leq \alpha(1,s)$$

puis la relation

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\alpha(x,s)}\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2/2}\mathrm{d}s$$

permet de conclure.

17

Transformée de Laplace

Théorème 5 *Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : |f(t)| \leq Ce^{at}$$

alors pour tout

$$z \in \Pi(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > a\}$$

la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. La fonction

$$\mathcal{L}(f) : \left|\begin{array}{l} \Pi(f) \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

18

*appelée, **transformée de Laplace** de f, est continue sur $\Pi(f)$.*

Preuve: Sous les hypothèses du théorème, on a pour tout $z \in \Pi(f)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : \left|f(t)e^{-zt}\right| \leq C\exp(a - \operatorname{Re} z)\,t$$

et la fonction $t \longmapsto \exp(a - \operatorname{Re} z)\,t$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le fait que sur tout compact $K \subset \Pi(f)$, on a

$$\forall z \in K, \forall t \in \mathbb{R}_+ : \left|f(t)e^{-zt}\right| \leq C\exp(a-s)\,t$$

où $s = \min\limits_{z\in K}\operatorname{Re}(z)$, de sorte que $\forall z \in K, \forall t \in \mathbb{R}_+ : \exp(-st) \leq \exp(-\operatorname{Re}(z)t)$, permet de conclure.

19

Exemples de Transformée de Laplace

(1) Pour la fonction

$$Y : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

dite fonction de *Heaviside*, on a

$$\mathcal{L}(Y) : z \longmapsto \frac{1}{z} \text{ définie pour } \operatorname{Re}(z) > 0$$

et pour tout $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}\left(t \longmapsto Y(t)e^{\mathrm{i}\omega t}\right) : z \longmapsto \frac{1}{z - \mathrm{i}\omega} \text{ définie pour } \operatorname{Re}(z) > 0$$

20

et grace aux formules d'Euler et la *linéarité évidente de la transformée de Laplace*, on a respectivement

$$\mathcal{L}(t \longmapsto Y(t)\cos\omega t) : z \longmapsto \frac{z}{\omega^2 + z^2}$$

$$\mathcal{L}(t \longmapsto Y(t)\sin\omega t) : z \longmapsto \frac{\omega}{\omega^2 + z^2}$$

$$\mathcal{L}(t \longmapsto Y(t)\mathrm{cosh}\omega t) : z \longmapsto -\frac{z}{\omega^2 - z^2}$$

$$\mathcal{L}(t \longmapsto Y(t)\mathrm{sinh}\omega t) : z \longmapsto -\frac{\omega}{\omega^2 - z^2}$$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}(t \longmapsto Y(t)t^n) : z \longmapsto \frac{n!}{z^{n+1}}$$

21

en général, on définit ***la fonction factoriel*** à l'aide de la fonction Γ, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > -1$, par

$$z! = \Gamma(z+1)$$

de sorte que pour tout $\nu \in \mathbb{R}^+$:

$$\mathcal{L}(t \longmapsto Y(t)t^\nu) : z \longmapsto \frac{\nu!}{z^{\nu+1}} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}.$$

Propriétés de la transformée de Laplace

(1) Sous les hypothèses du théorème précédent, si on pose, on a

$$\mathcal{L}\left(t \longmapsto e^{ct}f(t)\right) : z \longmapsto \mathcal{L}(f)(z-c)$$

22

pour tout $c \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{L}(t \longmapsto f(t-\tau)) : z \longmapsto e^{-\tau z}\mathcal{L}(f)(z)$$

pour tout $\tau \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $\lambda > 0$

$$\mathcal{L}(t \longmapsto f(\lambda t)) : z \longmapsto t \longmapsto \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}(f)\left(\frac{1}{\lambda}z\right).$$

(2) Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$, alors pour tout $z \in \Pi(f)$:

$$\mathcal{L}(f)(z) = z\mathcal{L}(F)(z) - F(0)$$

de sorte que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, continue en 0, alors

$$\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)$$

23

et en général si f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, continue, avec toutes ses dérivées, en 0 alors

$$\mathcal{L}\left(f^{(k)}\right)(z) = z^k \mathcal{L}(f)(z) - \sum_{p=1}^{k} z^{k-p} f^{(p-1)}(0).$$

(3) Le ***produit de convolution*** de deux fonctions f et g (continues par morceaux sur $\mathbb{R}$) est la fonction

$$f * g : x \longmapsto \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

Exercice 2 *Etudier les propriétés algébriques ainsi la continuité et dérivabilité du produit de convolution.*

Proposition 4 *La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions f et g est donnée par*

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\, \mathcal{L}(g)$$

et est défini sur $\Pi(f) \cap \Pi(g)$.

Preuve: Utiliser soigneusement Fubini.