

# Intégrales multiples

B. Seddoug

CPGE Médiane Sup

## 1 Définition - Exemples

**Définition 1** Soit  $D = [a, b] \times [c, d]$  un rectangle  $\mathbb{R}^2$  et  $f$  une fonction continue sur  $D$ , à valeurs réelles. On définit

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

On a démontré **le théorème de Fubini** qui énonce que le rôle des deux variables est symétrique, c'est-à-dire que l'on

1

peut aussi écrire :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

- Dans le cas où  $f(x, y) = g(x)h(y)$ , il est évident que

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} g(x)h(y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy.$$

**Exemple 1**  $D = [0, 2] \times [0, 1]$ ,  $f(x, y) = x^2 + y$  :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 \left( \int_0^1 (x^2 + y) dy \right) dx$$

2

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 \left( \left[ x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1} \right) dx = \int_0^2 \left( x^2 + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

- On étend aussi cette définition au cas où le domaine d'intégration  $D$  est de la forme :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

appelé **domaine élémentaire, simple du plan euclidien**  $\mathbb{R}^2$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  sont continues. En posant :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

3

- La méthode générale de calcul de  $\iint_D f(x, y) dx dy$  consiste donc à intégrer d'abord par rapport à une variable,  $y$  par exemple, les bornes dépendant de  $x$  puis à intégrer par rapport à l'autre variable.
- Pour les fonctions continues, on peut intervertir l'ordre d'intégration (*théorème de Fubini*) dans le cas de domaines simples.

**Exemple**

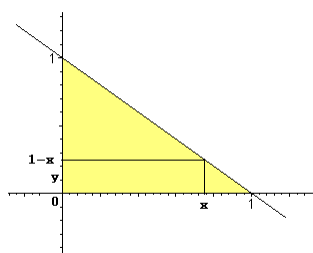
$$\iint_D x^2 y dx dy \text{ où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 1\}.$$

4

Le domaine  $D$  peut aussi s'exprimer sous la forme

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y\}. \end{aligned}$$

5



Donc

$$\iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} x^2 y dy \right) dx$$

6

$$= \int_0^1 \frac{x^2 (1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{60}$$

On vérifie également que

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-y} x^2 y dx \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{3} (1-y)^3 y dy = \frac{1}{60}.$$

**Aire d'une ellipse :**

- En général l'aire d'un domaine  $D$  est donnée par

$$Aire(D) = \iint_D 1 dx dy,$$

7

<p>Dans le cas de l'ellipse</p> $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$ <p>on a</p> $\iint_D 1 dx dy = 4 \int_0^a \left( \int_0^{\psi(x)} 1 dy \right) dx,$ <p>où <math>\psi(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}</math>. On trouve <math>Aire(D) = \pi ab</math>.</p> <p><b>Exercice 1</b> Calculer l'aire du domaine délimité par une cardioïde donnée en polaire par</p> $\rho = a(1 + \cos \theta).$ <p style="text-align: right;">8</p>	<h2 style="text-align: center;">2 Propriétés</h2> <p>(1) <b>Linéarité par rapport au domaine</b> : Si <math>D</math> et <math>D'</math> sont dis-joints on a :</p> $\iint_{D \cup D'} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_{D'} f(x, y) dx dy$ <p>(2) <b>Linéarité</b> : Pour <math>f, g</math> continues sur <math>D</math> et <math>\lambda</math> réel on a :</p> $\iint_D (f + \lambda g) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \lambda \iint_D g(x, y) dx dy.$ <p>(3) <b>Monotonie</b> : Pour <math>f, g</math> continues sur <math>D</math> on a :</p> $f \leq g \implies \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy.$ <p style="text-align: right;">9</p>
<p>En particulier si <math>f \geq 0</math> : <math>\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0</math>.</p> <h2 style="text-align: center;">3 Changement de variables</h2> <p>On admet le théorème suivant qui donne la formule de changement de variable en général :</p> <p><b>Théorème 1</b> Soit <math>D</math> et <math>\Delta</math> deux domaines simples de <math>\mathbb{R}^2</math>. Si <math>\Psi</math> est un difféomorphisme de <math>\Delta</math> sur <math>D</math>, <math>f : D \rightarrow \mathbb{R}^2</math> continue, alors</p> $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f \circ \Psi(u, v)  J_{\Psi}(u, v)  du dv$ <p><math>J_{\Psi}(u, v)</math> désigne le jacobien de <math>\Psi</math> en <math>(u, v)</math>.</p> <p style="text-align: right;">10</p>	<p><b>Cas affine</b> :</p> <p>On pose</p> $\begin{cases} x = au + bv + c \\ y = a'u + b'v + c \end{cases}$ <p>alors on a</p> $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(au + bv + c, a'u + b'v + c)  ab' - a'b  du dv$ <p>Où <math>\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in D\}</math>.</p> <p style="text-align: right;">11</p>
<p><b>Aire d'un parallélogramme</b> : Soit <math>D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :  x  +  y  \leq 1\}</math>. Avec le changement de variable</p> $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v \end{cases}$ <p>On a <math>\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in D\} = [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2] \times [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]</math>.</p> <p>Donc</p> $\iint_D dx dy = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} du \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} dv = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$ <p style="text-align: right;">12</p>	<p><b>Coordonnées polaires</b> :</p> <p>Il s'agit de la formule de changement de coordonnées :</p> $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ <p>Dans ce cas on a :</p> $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$ <p>Où <math>\Delta = \{(r, \theta) : (r \cos \theta, r \sin \theta) \in D\}</math>.</p> <p style="text-align: right;">13</p>
<p><b>Aire d'un disque</b> : <math>D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}</math> :</p> $\begin{aligned} \iint_D dx dy &= \iint_{\Delta} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R r dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} R^2 = \pi \cdot R^2. \end{aligned}$ <p style="text-align: right;">14</p>	