

Forme différentielle

B. Seddoug

CPGE Médiane Sup

1 Forme différentielle de degré 1

Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n , dans la pratique $n = 2$ ou $n = 3$.

Définition 1 On appelle *Forme différentielle de degré 1* sur \mathcal{U} toute application ω définie sur \mathcal{U} à valeur dans le dual de \mathbb{R}^n .

Le dual $(\mathbb{R}^n)^*$ étant muni d'une norme subordonnée quelconque,

$$\forall \varphi \in (\mathbb{R}^n)^* : \|\varphi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} |\varphi(x)|.$$

C'est donc un evn, on dit alors que ω est de classe C^k , avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ si elle possède cette propriété en tant qu'application entre evn.

1

- Si ω est une forme différentielle, alors pour tout $x \in \mathcal{U}$, $\omega(x)$ est une forme linéaire, qui s'écrit sous la forme

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) e_i^*$$

$\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ désigne la base duale de la base canonique (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n , les applications

$$a_i : \begin{cases} \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \omega_i(x) \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

sont alors les coordonnées de ω dans \mathcal{B}^* , on a donc :

Proposition 1 ω est de classe C^k si et seulement si pour tout $i \in [1, n]$, ω_i est de classe C^k .

2

L'ensemble des formes différentielles sur \mathcal{U} de classe C^k , n'est donc autre que le $\mathbb{R} - \text{ev}, C^k(\mathcal{U}, (\mathbb{R}^n)^*)$.

Notation différentielle

Pour tout $i \in [1, n]$ e_i^* n'est autre que la forme linéaire coordonnée :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

on la note dx_i , de sorte

$$\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \dots + \omega_n dx_n$$

3

Un exemple de forme différentielle est donné par les différentielles d'applications différentielles à valeur réelle :

Proposition 2 Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , $k \in \mathbb{N}^*$. La différentielle

$$df : \begin{cases} \mathcal{U} \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \\ x \longmapsto df_x \end{cases}$$

de f est une forme différentielle de degré 1 de classe C^{k-1} . Les composantes de df_x sont les $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $1 \leq i \leq n$:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

4

Ce qui permet de définir la notion de primitive d'une forme différentielle :

Formes différentielles exactes

Définition 2 On dit qu'une forme différentielle ω est *exacte* s'il existe une application $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\omega = df$.

On dit alors que f est une *primitive* de ω , si $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$, alors

$$\forall i \in [1, n] : \omega_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Déterminer f revient donc à résoudre un système d'équations aux dérivées partielles.

5

Remarque 1 Si \mathcal{U} est un ouvert connexe par arcs, alors deux primitives d'une forme exacte diffèrent d'une constante.

Exemples

Soit la forme différentielle $\omega(x, y) = e^y dx + (xe^y - 2y)dy$. Cherchons f tel que $df = \omega$, c.à.d :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y - 2y \end{cases}$$

6

en intégrant la première équation, on a

$$f(x, y) - f(0, y) = xe^y$$

on écrit alors

$$xe^y - 2y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^y + \frac{\partial f}{\partial y}(0, y)$$

on déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = -2y$$

et

$$f(0, y) = -y^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

on conclut alors que

$$f(x, y) = xe^y - y^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

7

<p>Formes différentielles fermées</p> <p>Si $\omega = df$ est une forme exacte de classe \mathcal{C}^1, alors grâce au théorèmes de Schwarz, on a pour tout $i \neq j$ dans $[1, n]$</p> $\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$ <p>Définition 3 On dit qu'une forme différentielle $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ est fermée, si pour tout $i \neq j$ dans $[1, n]$</p> $\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}.$	<p>On a donc la proposition :</p> <p>Proposition 3 Toute forme différentielle exacte de classe \mathcal{C}^1 est fermée.</p> <p>Soit par exemple :</p> <p>Intégrale d'une 1-forme différentielle</p> <p>Soient $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ une forme différentielle continue sur \mathcal{U} et</p> $\gamma : \begin{cases} [a, b] \longrightarrow \mathcal{U} \\ t \longmapsto (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$
<p>un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1.</p> <p>Définition 4 On appelle Intégrale de la forme différentielle ω suivant le chemin fini γ, le réel :</p> $\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t)) (\gamma'(t)) dt = \sum_{i=1}^n \int_a^b \omega_i(\gamma(t)) x'_i(t) dt.$ <p>Exemple</p> <p>Avec $\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ sur le cercle</p> $\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$	<p>on a</p> $\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} x'(t) + \frac{x}{x^2 + y^2} y'(t) \right) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = 2\pi.$ <p>Proposition 4 Si $\omega = df$ est une forme exacte de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U}, alors pour tout arc $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathcal{U}$, on a</p> $\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$
<p>En effet: Si $\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ alors</p> $\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_1(t), \dots, x_n(t)) x'_i(t) dt = \int_a^b [f(x_1(t), \dots, x_n(t))] dt = [f(\gamma(t))]_a^b.$ <p>Définition 5 On appelle lacet dans \mathcal{U} tout chemin $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathcal{U}$ fermé, c.à.d vérifiant $\gamma(a) = \gamma(b)$.</p> <p>Théorème 1 Soit \mathcal{U} est un ouvert connexe par arcs. Une forme continue ω sur \mathcal{U} est exacte si et seulement si l'intégrale de ω suivant tout lacet dans \mathcal{U} est nulle.</p>	<p>Preuve: Il est clair que si $\gamma(b) = \gamma(a)$, alors</p> $\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0.$ <p>L'implication réciproque est très technique. Une démonstration peut être trouvée dans le livre de E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux : Cours de mathématiques spéciales, tome 5, à partir de la page 232.</p> <p>Définition 6 On dit que l'ouvert \mathcal{U} est étoilé s'il existe un point $A \in \mathcal{U}$ tel que pour tout point M de \mathcal{U} le segment $[AM]$ est inclus dans \mathcal{U}.</p> <p>Théorème 2 (Poincaré) Toute forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé \mathcal{U} est exacte.</p>
<p>Preuve: Soit $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ une forme fermée sur \mathcal{U} étoilé par rapport un point A. Pour tout $x \in \mathcal{U}$, on considère</p> $\gamma_x : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathcal{U} \\ t \longmapsto A + t(x - A) \end{cases}$ <p>et on pose</p> $f(x) = \int_{\gamma_x} \omega = \int_0^1 \omega(\gamma_x(t)) \gamma'_x(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \omega_i(A + t(x - A)) (x_i - A_i) dt$	$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(A + t(x - A)) (x_i - A_i) dt$ <p>les ω_i sont continues donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} et pour tout $j \in [1, n]$</p> $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [\omega_i(A + t(x - A)) (x_i - A_i)] dt$ <p>et pour tout $i \in [1, n]$:</p> $\frac{\partial}{\partial x_j} [\omega_i(A + t(x - A)) (x_i - A_i)] = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(A + t(x - A)) t (x_i - A_i) + \omega_i(A + t(x - A)) \delta_{i,j}$

<p>donc</p> $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} (A + t(x - A)) t(x_i - A_i) + \omega_i (A + t(x - A)) \right) dt$ <p>et puisque ω est fermée alors</p> $\begin{aligned} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} (A + t(x - A)) t(x_i - A_i) \\ = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} (A + t(x - A)) t(x_i - A_i) \end{aligned}$ <p style="text-align: right;">16</p>	<p>d'autre part, si on pose</p> $h(t) = t\omega_j (A + t(x - A))$ <p>on a aussi</p> $h'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} (A + t(x - A)) t(x_i - A_i) + \omega_j (A + t(x - A))$ <p>et par conséquent</p> $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = [t\omega_j (A + t(x - A))]_0^1 = \omega_j(x).$ <p>Remarque 2 La condition sur l'ouvert n'est pas superflue, la ré-</p> <p style="text-align: right;">17</p>
<p>ci-proque étant fausse sans cette condition, par exemple :</p> $\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ <p>sur $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est fermée car</p> $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ <p>mais non exacte, car son intégrale sur le cercle unité n'est pas nulle.</p> <p>Propriétés</p> <p>Changement de paramètre</p> <p style="text-align: right;">18</p>	<p>Proposition 5 Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$, est un chemin de classe C^k et $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ est un changement de paramètre admissible de classe C^k, alors</p> $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma \circ \varphi} \omega \text{ ou bien } \int_{\gamma} \omega = - \int_{\gamma \circ \varphi} \omega$ <p>selon que φ est croissante ou décroissante.</p> <p>Preuve: Posons $\delta = \gamma \circ \varphi$, alors</p> $\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} \omega &= \int_{\alpha}^{\beta} \omega(\gamma \circ \varphi(t)) (\gamma' \circ \varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \omega(\gamma(s)) (\gamma'(s)) ds \end{aligned}$ <p style="text-align: right;">19</p>
<p style="text-align: center;">$= \pm \int_a^b \omega(\gamma(s)) (\gamma'(s)) ds = \pm \int_{\gamma} \omega.$</p> <p>Linéarité</p> <p>Proposition 6 Si ω et v sont deux formes différentielles continues sur \mathcal{U} et γ un arc paramétré de \mathcal{U}, on a alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$:</p> $\int_{\gamma} (\alpha\omega + \beta v) = \alpha \int_{\gamma} \omega + \beta \int_{\gamma} v.$ <p>Relation de Chasles</p> <p>Proposition 7 Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ est un chemin paramétré de classe C^1, $c \in [a, b]$ et ω une forme différentielle continue sur \mathcal{U},</p> <p style="text-align: right;">20</p>	<p>alors</p> $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma _{[a,c]}} \omega + \int_{\gamma _{[c,b]}} \omega.$ <ul style="list-style-type: none"> • La relation de Chasles permet d'étendre immédiatement la notion d'intégrale curviligne d'une forme différentielle sur un arc paramétré au cas des arcs paramétrés continus et de classe C^1 par morceaux. <p>Inégalité de la moyenne</p> <p>Proposition 8 Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ est un chemin paramétré de classe C^1 et ω une forme différentielle continue sur \mathcal{U}, alors</p> $\left \int_{\gamma} \omega \right = \sup_{x \in \text{Im}(\gamma)} \ \omega(x)\ \int_a^b \ \gamma'(t)\ dt.$ <p style="text-align: right;">21</p>
<p>$\int_a^b \ \gamma'(t)\ dt$ n'est autre que la longueur de l'arc γ.</p> <h2>2 Champs de vecteurs</h2> <p>Dans toute la suite $n = 2$ ou $n = 3$ et \mathcal{U} est un ouvert de \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne canonique.</p> <p>Définition 7 On appelle champ de vecteurs sur \mathcal{U}, toute application de \mathcal{U} dans \mathbb{R}^n :</p> $\vec{F} : \begin{matrix} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ M & \longmapsto & \vec{F}(M) \end{matrix},$ <p>les éléments de \mathcal{U} sont considérés comme points.</p> <p style="text-align: right;">22</p>	<p>Une application de \mathcal{U} dans \mathbb{R} est par fois appelée champ de scalaires.</p> <p>Définitions</p> <p>(1) Soit f un champ de scalaire de classe C^1 sur \mathcal{U}, on appelle gradient de f le champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}} f$ ou $\overrightarrow{\nabla} f$ définit sur \mathcal{U} par :</p> $\overrightarrow{\text{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$ <p>si $n = 2$ la composante $\frac{\partial f}{\partial z}$ est ignorée.</p> <p style="text-align: right;">23</p>

<p>(2) Si f est de classe C^2 sur \mathcal{U}, on appelle <i>laplacien</i> de f le champ scalaire Δf défini sur \mathcal{U} par :</p> $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$ <p>si $n = 2$ la quantité $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ est ignorée.</p> <p>(3) Soit $\vec{F} : (x, y, z) \mapsto (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ où P, Q et R sont des champs scalaires de classe C^1 sur \mathcal{U}.</p> <p>(i) On appelle <i>divergence</i> de \vec{F} le champ scalaire $\text{div} \vec{F}$</p> <p style="text-align: right;">24</p>	<p>défini sur \mathcal{U} par :</p> $\text{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$ <p>si $n = 2$ la composante z et la quantité $\frac{\partial R}{\partial z}$ sont ignorées.</p> <p>(ii) On appelle <i>rotationnel</i> de \vec{F} le champ vectoriel $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}$ défini sur \mathcal{U} par :</p> $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$ <p style="text-align: right;">25</p>
<p>Formules d'analyse vectorielle</p> <p>Soient f, g des champs scalaires et \vec{F}, \vec{G} des champs vectoriels de classe C^1 sur \mathcal{U} et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les formules suivantes :</p> <ul style="list-style-type: none"> $\overrightarrow{\text{grad}}(f + \lambda g) = \overrightarrow{\text{grad}}(f) + \lambda \overrightarrow{\text{grad}}(g)$ $\text{div}(\vec{F} + \lambda \vec{G}) = \text{div}(\vec{F}) + \lambda \text{div}(\vec{G})$ $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F} + \lambda \vec{G}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) + \lambda \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{G})$ $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}}(g) + g \overrightarrow{\text{grad}}(f)$ $\text{div}(f \vec{F}) = f \text{div}(\vec{F}) + \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{F}$ $\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{F}) = f \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) + \overrightarrow{\text{grad}}(f) \wedge \vec{F}$ <p style="text-align: right;">26</p>	<ul style="list-style-type: none"> $\text{div}(\vec{F} \wedge \vec{G}) = (\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F})) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{G}))$. <p>Si de plus les champs sont de classe C^2, on a :</p> <ul style="list-style-type: none"> $\Delta(f + \lambda g) = \Delta f + \lambda \Delta g$ $\Delta(fg) = f \Delta g + 2 \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(g) + g \Delta f$ $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \vec{0}, \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F})) = 0,$ $\overrightarrow{\text{rot}}(f \overrightarrow{\text{grad}}(g)) = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \wedge \overrightarrow{\text{grad}}(g).$ <p>Potentiel scalaire</p> <p>Définition 8 Soit \vec{F} un champ de vecteurs sur \mathcal{U}, on dit que \vec{F} dérive d'un potentiel s'il existe un champ scalaire f de classe C^1 sur \mathcal{U} tel que $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(f)$. Dans ce cas f est appelé potentiel</p> <p style="text-align: right;">27</p>
<p>scalaire de \vec{F}.</p> <p>Théorème 3 Soit \vec{F} un champ de vecteurs de classe C^1 sur \mathcal{U}.</p> <p>(i) Si \vec{F} admet un potentiel scalaire, alors $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) = \vec{0}$.</p> <p>(ii) Réciproquement, si $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) = \vec{0}$ et si \mathcal{U} est étoilé alors \vec{F} admet un potentiel scalaire.</p> <p>Circulation, intégrale curviligne</p> <p>Définition 9 Soit $\Gamma = ([a, b], t \mapsto M(t))$ un arc paramétré orienté de classe C^1 par morceaux, dont le support est inclus dans</p> <p style="text-align: right;">28</p>	<p>\mathcal{U}, et soit \vec{F} un champ de vecteurs continu sur \mathcal{U}. L'intégrale</p> $\int_a^b \vec{F}(M(t)) \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt$ <p>est appelée <i>intégrale curviligne</i>, ou <i>circulation</i> de \vec{F} sur Γ, on la note : $\oint_{\Gamma} \vec{F}(M) \cdot d\vec{M}$.</p> <p>Remarque 3 Si $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, on note aussi cette intégrale</p> $\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b \{P(x, y)x' + Q(x, y)y'\} dt$ <p style="text-align: right;">29</p>
<p>Proposition 9 Si \vec{F} dérive d'un potentiel f (i.e : $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(f)$) alors :</p> $\oint_{\Gamma} \vec{F}(M) \cdot d\vec{M} = f(B) - f(A),$ <p>A et B sont respectivement origine et extrémité de Γ.</p> <p>Remarque 4 Si la courbe Γ est fermée, alors la circulation sur Γ de tout champ de vecteurs dérivant d'un potentiel est nulle.</p> <p>Formule de Green-Riemann</p> <p>Soit D un domaine élémentaire de \mathbb{R}^2. On suppose que le bord ∂D de D est la réunion de courbes de classe C^1 que l'on oriente de telle façon que le vecteur normal soit dirigé vers</p> <p style="text-align: right;">30</p>	<p>l'intérieur de D. On admet la formule de Green-Riemann suivante :</p> <p>Proposition 10 Si $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ est un champ de vecteurs de classe C^1 sur un ouvert \mathcal{U} (contenant D), alors :</p> $\oint_{\partial D} \vec{F}(M) \cdot d\vec{M} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$ <ul style="list-style-type: none"> Pour trouver l'aire de D, qui vaut $\iint_D dx dy$, il suffit de trouver deux fonctions P et Q telles que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, prendre par exemple $P = 0, Q = x$ et $\vec{F} = (0, x)$. <p style="text-align: right;">31</p>