Espaces euclidiens

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

Table des matières

I Espace préhilbertien

I.1 Produit scalaire

Cas réel

Définition I.1 *Soit E un $\mathbb{R}-ev$. On appelle produit scalaire sur E, toute forme bilinéaire symétrique définie positive.*

Exemples

(1) Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$: $(x,y) \longmapsto \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

①

(2) Produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$:

$$(f,g) \longmapsto \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

(3) Produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$:

$$(P,Q) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i)$$

où $(x_0,...,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixé.

(4) Produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(M,N) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^tMN)$.

②

Cas complexe

Définition I.2 *Soit E un $\mathbb{C}-ev$. On dit que $f : E\times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une forme* ***sesquilinéaire*** *sur E si*
- *$\forall x \in E$, l'application $y \longmapsto f(x,y)$ est linéaire sur E,*
- *$\forall y \in E$, l'application $x \longmapsto f(x,y)$ est* ***semi-linéaire*** *sur E, i.e :*
  - *$\forall x,x' \in E : f(x+x',y) = f(x,y)+f(x',y)$.*
  - *$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda x,y) = \overline{\lambda} f(x,y)$.*

Définition I.3 *Une forme sesquilinéaire $f : E\times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite* ***hermitienne*** *si*

$$\forall x,y \in E : f(y,x) = \overline{f(x,y)}$$

dans ce cas $\forall x \in E : f(x,x) \in \mathbb{R}$.

③

Remarque I.1 *Dans le cas d'une forme hermitienne la notion d'orthogonalité et toutes ses dérivées sont définies de la même manière, car*

$$\forall x,y \in E : f(y,x) = 0 \Longleftrightarrow f(x,y) = 0$$

Définition I.4 *On dit qu'une forme sesquilinéaire hermitienne $f : E\times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est* ***positive*** *(resp* ***définie positive****) si*

$$\forall x \in E : f(x,x) \geq 0$$

$$\text{(resp } \forall x \in E \setminus \{0\} : f(x,x) > 0)$$

Théorème I.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Si f est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive (ou négative) alors*

$$\forall x,y \in E : |f(x,y)|^2 \leq f(x,x)f(y,y)$$

④

avec égalité si et seulement si (x,y) liée.

Preuve: Cas complexe. Si $y=0$ ou $f(x,y)=0$, l'inégalité est évidente, si non, on pose

$$f(x,y) = |f(x,y)|\, e^{-i\theta}$$

et on considère $f(x+\lambda e^{i\theta}y, x+\lambda e^{i\theta}y)$ avec λ réel, qui est un polynôme de degré 2 en λ :

$$\begin{aligned} f\left(x+\lambda e^{i\theta}y, x+\lambda e^{i\theta}y\right) &= f(x,x) + 2\lambda \operatorname{Re}\left(e^{i\theta} f(x,y)\right) \\ &\quad + \lambda^2 f(y,y) \\ &= f(x,x) + 2\lambda\, |f(x,y)| + \lambda^2 f(y,y) \end{aligned}$$

on termine alors comme dans le cas réel,

$$\triangle' = |f(x,y)|^2 - f(x,x)f(y,y) \leq 0$$

⑤

L'égalité est possible si $x+\lambda e^{i\theta}y = 0$ pour un certain λ.

Théorème I.2 *Un produit scalaire (réel ou complexe) est une forme non dégénérée.*

Preuve: utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition I.5 *Soit E un $\mathbb{C}-ev$. On appelle produit scalaire (hermitien) sur E, toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.*

⑥

Exemples

(1) Produit scalaire hermitien usuel sur $\mathbb{C}^n$:

$$(x,y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$$

(2) Produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$:

$$(f,g) \longmapsto \int_a^b \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t$$

(3) Produit scalaire sur $E = \mathbb{C}_n[X]$:

$$(P,Q) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \overline{P(x_i)} Q(x_i)$$

⑦

où $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixé.

(4) Produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $(M,N) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^t\overline{M}N)$.

Définition I.6 *On appelle espace préhilbertien réel (resp complexe) un couple (E, Φ) d'un $\mathbb{R}-ev$ (resp $\mathbb{C}-ev$) E et d'une forme bilinéaire symétrique (resp sesquilinéaire hermitienne) définie positive.*

Définition I.7 *Un espace Euclidien (resp Hermitien) est un préhilbertien réel (resp complexe) de dimension finie.*

Norme euclidienne

Théorème I.3 *Si (E, Φ) est un espace préhilbertien, l'application*

$$x \longmapsto \sqrt{\Phi(x,x)}$$

⑧

est une norme sur E.

- On utilise les notations

$$(u \mid v), \langle u \mid v \rangle, \langle u, v \rangle \text{ ou simplement } u.v$$

pour désigner un produit scalaire et $\| \ \|$ pour la norme euclidienne.
- La distance associée à la norme sur E est dite distance euclidienne.
- L'**inégalité de Cauchy–Schwarz** s'écrit :

$$\forall u, v \in E : |(u \mid v)| \leq \|u\| \|v\|$$

Preuve: L'inégalité triangulaire

$$\sqrt{\Phi(x+y)} \leq \sqrt{\Phi(x)} + \sqrt{\Phi(y)}$$

⑨

dite de **Minkowski** est conséquence de l'inégalité de Cauchy–Schwarz en passant aux carrés.

Les autres propriétés de la norme sont évidentes.

Identités de polarisation

- Cas réel

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)$$

$$4(x \mid y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

- Cas hermitien

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x \mid y)$$

⑩

$$4\,\mathrm{Re}(x \mid y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

$$4(x \mid y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2$$

Identité du parallélogramme

- Cas réel et hermitien

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

qui exprime le fait que la somme des carrés des distances des deux diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des distances des quatres cotés.

⑪

I.2 Orthogonalité

Un produit scalaire étant une forme bilinéaire (ou sesquilinéaire), on définit donc les notions d'orthogonalité qui vérifient toutes les propriétés du cas général, et bien entendu d'autre propriétés liées au fait qu'un produit scalaire et une forme définie positive.

On suppose dans la suite que E est un espace préhilbertien réel ou complexe. On a donc les résultats déjà établis pour une forme quadratique.

Proposition I.1 *Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre, en particulier toute famille orthonormale de E est libre.*

Théorème I.4 *Si E est de dimension finie (euclidien ou hermitien),*

⑫

alors E possède une base orthonormale.

Théorème I.5 *Si E est de dimension finie, alors toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.*

Algorithme de Gram-Schmidt

Théorème I.6 *Si E est de dimension finie, alors pour toute base $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ de E il existe une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ orthonormale vérifiant*

$$\forall k \in [\![1, n]\!] : \mathrm{vect}(v_1, ..., v_k) = \mathrm{vect}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k)$$

c.à.d la matrice de passage $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est triangulaire supérieure.

⑬

Preuve: Description de l'algorithme de Gram Schmidt :
On construit la base $\mathcal{B}'$ par récurrence
- On pose $\varepsilon_1 = v_1 / \|v_1\|$.
- Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on suppose construit $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k$; puis on pose

$$\varepsilon'_{k+1} = -\sum_{j=1}^{k} (v_{k+1} \mid \varepsilon_j)\, \varepsilon_j + v_{k+1} \text{ et } \varepsilon_{k+1} = \varepsilon'_{k+1} / \left\|\varepsilon'_{k+1}\right\|.$$

Remarque I.2 *$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ peut être choisie avec des coefficients diagonaux positifs (ou négatifs ou mixtes).*

⑭

Exemple I.1 *Dans* $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1,-1,0)$, $v_2 = (-1,1,1)$, $v_3 = (1,1,1)$. *On trouve*

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

$$\varepsilon_2 = (1,-1,0) + (-1,1,1) = (0,0,1)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-(0,0,1)+(1,1,1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

avec la matrice de passage

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

15

Ecriture d'un vecteur dans une b.o.n

Théorème I.7 *Si une famille de vecteurs* $(v_1,...,v_p)$ *de* E *est orthogonale alors* $\left\|\sum\limits_{i=1}^{p} v_i\right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{p}\|v_i\|^2$.

Preuve: généralise thérème de Pythagore. Prouver la par récurrence sur p.

Théorème I.8 *Si* $(e_1,...,e_n)$ *est b.o.n de* E *alors pour tout* $x \in E$

$$x = \sum_{i=1}^{n}(x \mid e_i)\,e_i \quad \textit{et} \quad \|x\|^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}|(x \mid e_i)|^2}_{\textit{Formule de Parseval}}$$

16

Exercice I.1 *Montrer que réciproquement, chacune des conditions* $x = \sum_{i=1}^{n}(x \mid e_i)\,e_i$ *(ou* $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n}|(x \mid e_i)|^2$*) vérifiée pour tout* $x \in E$ *suffit pour que la famille* $(e_1,...,e_n)$ *soit une b.o.n.*

Proposition I.2 *Si* F *est un sous-espace vectoriel de* E *alors*

$$F^{\perp} \cap F = \{0\}$$

Théorème I.9 *Soit* F *un sous-espace vectoriel de dimension finie de* E *alors*

$$E = F \oplus F^{\perp} \quad \textit{et} \quad \left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$$

17

Preuve: Soit $(e_1,...,e_p)$ base de F. Pour tout $x \in E$

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p}(x \mid e_i)\,e_i}_{x_1} + \underbrace{\left(x - \sum_{i=1}^{p}(x \mid e_i)\,e_i\right)}_{x_2}$$

avec $x_1 \in F$ et

$$\begin{aligned}(x_1 \mid x_2) &= \left(\sum_{i=1}^{p}(x \mid e_i)\,e_i \mid x - \sum_{i=1}^{p}(x \mid e_i)\,e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p}|(x \mid e_i)|^2 - \left\|\sum_{i=1}^{p}(x \mid e_i)\,e_i\right\|^2 = 0\end{aligned}$$

18

donc $x_2 \in F^{\perp}$.

On a $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ et si $x \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ alors $x = x_1 + x_2 \in F \oplus F^{\perp}$, donc $x_2 = x - x_1 \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp} \cap F^{\perp} = \{0\}$.

Exemples

(1) $\{0\} = E$; $E^{\perp} = \{0\}$;

(2) Hyperplan : si $a \in E$, $a \neq 0$, alors $\{a\}^{\perp}$ est un hyperplan de E, appelé hyperplan orthogonal à a.

Projecteur orthogonal

Définition I.8 *Si* $E = F \oplus F^{\perp}$ *(c'est le cas si* $\dim F < \infty$*), la projection* p_F *sur* F *parallélement à* $F^{\perp}$ *est appelée la projection*

19

orthogonale sur F.

Proposition I.3 *Dans ce cas si* $(e_1,...,e_n)$ *est une b.o.n de* F *alors*

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n}(x \mid e_i)\,e_i \quad \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$$

$$\textit{et} \quad \sum_{i=1}^{n}|(x \mid e_i)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \textit{(Inégalité de Bessel)}$$

Définition I.9 *On appelle distance d'un point* $x \in E$ *à* F, $d(x,F)$ *le réel*

$$d(x,F) = \inf_{z \in F}\|z - x\| .$$

20

D'après ce qui prècede on a :

Théorème I.10 *Pour tout* $x \in E$, $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$. *C'est à dire que* $\inf\limits_{z \in F}\|z - x\|$ *est atteint en l'unique point* $p_F(x)$ *et*

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + (d(x,F))^2$$

Preuve: Pour tout $z \in F$:

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 &= \| \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^{\perp}} + \underbrace{p_F(x) - z}_{\in F} \|^2 \\ &= \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - z\|^2\end{aligned}$$

minimal si et seulement si $\|p_F(x) - z\| = 0$.

21

Matrice et déterminant de Gram (voir Sup)

Définition I.10 *La matrice de Gram* $\mathrm{G}(v_1,...,v_p)$ *d'une famille* $(v_1,...,v_p)$ *d'éléments de* E *(euclidien réel) est la matrice*

$$\mathrm{G}(v_1,...,v_p) = ((v_i \mid v_j))_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

et son déterminant est appelé déterminant de Gram de $(v_1,...,v_p)$, *noté* $\mathrm{Gram}(v_1,...,v_p)$.

Théorème I.11 *Avec le notations ci-dessus,* $G = {}^tAA$ *où* A *est la matrice de* $(v_1,...,v_p)$ *dans une base orthonormale de* E *et* $\mathrm{rang}(G) = \mathrm{rang}(A)$.

Théorème I.12 *Une matrice symétrique* $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est définie*

22

positive si et seulement si elle est la matrice de Gram d'une base de E.

Preuve: On a déjà vu (chapitre algèbre bilinéaire) qu'une matrice réelle symétrique définie positive est congruente à I_n.

Théorème I.13 *F sev de E (euclidien réel), $(e_1, ..., e_p)$ base de F. Pour tout $x \in E$:*

$$(d(x, F))^2 = \frac{\mathrm{Gram}(e_1, ..., e_p, x)}{\mathrm{Gram}(e_1, ..., e_p)}$$

23

Preuve: Si $x \in F$, la formule est évidente. Si non

$$\mathrm{Gram}(e_1, ..., e_p, x) = \begin{vmatrix} & \mathrm{G}(e_1, ..., e_p) & & (e_1 \mid x) \\ & & & \vdots \\ & & & (e_p \mid x) \\ (e_1 \mid x) & \cdots & (e_p \mid x) & \|x\|^2 \end{vmatrix}$$

et en posant $v = p_F(x)$ et $w = x - v \in F^\perp$, on a $\|x\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ et $(e_i \mid x) = (ei \mid v)$ donc

$$\mathrm{Gram}(e_1, ..., e_p, x) = \begin{vmatrix} & \mathrm{G}(e_1, ..., e_p) & & (e_1 \mid v) \\ & & & \vdots \\ & & & (e_p \mid v) \\ (e_1 \mid v) & \cdots & (e_p \mid v) & \|v\|^2 + \|w\|^2 \end{vmatrix}$$

24

$$= \begin{vmatrix} & \mathrm{G}(e_1, ..., e_p) & & (e_1 \mid v) \\ & & & \vdots \\ & & & (e_p \mid v) \\ (e_1 \mid v) & \cdots & (e_p \mid v) & \|v\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \mathrm{G}(e_1, ..., e_p) & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ (e_1 \mid v) & \cdots & (e_p \mid v) & \|w\|^2 \end{vmatrix}$$

donc

$$\mathrm{Gram}(e_1, ..., e_p, x) = \mathrm{Gram}(e_1, ..., e_p, v) + \mathrm{Gram}(e_1, ..., e_p) \|w\|^2 .$$

25

Comme $(e_1, ..., e_p, v)$ est liée, on conclut en remarquant que $\|w\| = d(x, F)$.

Exemples dans $\mathbb{R}^3$

Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Gram}(u, v) = \|u \wedge v\|^2$$

et donc on a :

$$d(x, \mathbb{R}u) = \frac{\|u \wedge x\|}{\|u\|} \text{ et}$$

$$d(x, \mathrm{vect}(u, v)) = \frac{|\mathrm{Det}\,(u, v, x)|}{\|u \wedge v\|} = \frac{|(u \wedge v \mid x)|}{\|u \wedge v\|}$$

ici $\mathrm{Det}\,(u, v, x)$ désignent le déterminant dans une b.o.n.d.

26

Remarque I.3 *Vous avez vu en Sup que :*

- *En dimension 2, $\sqrt{\mathrm{Gram}(v_1, v_2)}$ désigne l'aire du parallélogramme décrit par les vecteurs v_1 et v_2, supposés linéairement indépendants.*
- *En dimension 3, $\sqrt{\mathrm{Gram}(v_1, v_2, v_3)}$ désigne le volume du parallélipipède (ancien) ou parallélépipède décrit par les vecteurs v_1, v_2 et v_3, supposés linéairement indépendants.*

II Enomorphisme dans un espace euclidien

Dans toute la suite on travaille dans E un espace euclidien (préhilbertien réel de dimension finie).

27

Théorème II.1 (Théorème de Riesz) *Si E est un espace euclidien (de dimension finie) Pour toute forme linéaire φ sur E il existe un unique $a \in E$ tel que*

$$\forall x \in E : \varphi(x) = (a \mid x) .$$

Preuve: Déjà vue dans le cas de forme quadratique non dégénérée.

II.1 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème II.2 *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que*

$$\forall x, y \in E : (x \mid u(y)) = (u^*(x) \mid y)$$

28

u^* est appelé adjoint de u. Dans ce cas on a aussi

$$\forall x, y \in E : (u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y))$$

Preuve: L'application $y \longmapsto (x \mid u(y))$ est une forme linéaire, donc il existe $x' \in E$ unique tel que $(x \mid u(y)) = (x' \mid y)$ pour tout $y \in E$. On note alors x' par $u^*(x)$, puis on montre que u^* est linéaire. L'unicité de u^* découle de celle de x'.

Propriétés

(1) L'application $u \longmapsto u^*$ est linéaire (semi-linéaire dans le cas complexe) sur $\mathcal{L}(E)$.

(2) Pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $(u^*)^* = u$ et $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

29

(3) Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a
- $\ker(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$ $\quad \mathrm{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$.
- $\ker(u^*u) = \ker(u)$ $\quad \mathrm{Im}(u^*u) = \mathrm{Im}(u^*)$. En particulier u et u^* ont même rang.

Théorème II.3 *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a*

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u), \ \det u^* = \det u; \ \mathrm{Tr}\, u^* = \mathrm{Tr}\, u$$
$$\text{et } \chi_{u^*} = \chi_u$$

Définition II.1 *Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice $M^* = {}^t\overline{M}$ est appelée **matrice adjointe** (ou transconjuguée) de M. i.e. si $M = (a_{ij})$*

30

*et $M^* = (b_{ij})$ alors $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. On dira alors que M est **hermitienne** si $M^* = M$. Dans le cas de matrice réelle c'est les notions de transposée et de matrice symétrique.*

- Les propriétés suivantes sont alors évidentes, pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(M+N)^* = M^* + N^* \qquad (\lambda M)^* = \overline{\lambda} M^*$$

$$(MN)^* = N^* M^* \qquad (M^*)^* = M$$

$$\det M^* = \overline{\det M};\ \operatorname{Tr} M^* = \overline{\operatorname{Tr} M} \text{ et } \chi_{M^*} = \overline{\chi_M}$$

et si $M \in GL_n(\mathbb{C})$, $M^* \in GL_n(\mathbb{C})$ et

$$(M^*)^{-1} = (M^{-1})^*$$

31

Endomorphisme autoadjoint

Définition II.2 *On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique (ou autoadjoint), si $u^* = u$, i.e :*

$$\forall x, y \in E : (u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$$

On dit qu'il est antisymétrique si $u^* = -u$, i.e :

$$\forall x, y \in E : (u(x) \mid y) = -(x \mid u(y))$$

Théorème II.4 *$u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans une **b.o.n** est symétrique.*

Proposition II.1 *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$, p est un projecteur autoadjoint si et seulement si $p \circ p = p$ et $p^* = p$.*

32

Preuve: en exercice.

Exercice II.1 *Si vous utilisez le théorème **II.8** dans le cas $p \neq 0$, vous aurez*

$$|||p|||_2 = 1.$$

Montrer ce résultat directement.

Théorème II.5 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. F est u-stable si et seulement si $F^{\perp}$ est u^*-stable.*

Théorème II.6 (Théorème spectral) *Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E est diagonalisable dans une base orthonormale.*

Preuve: Par récurrence sur la dimension de E.

33

Endomorphisme positif

Définition II.3 *Soit un endomorphisme autoadjoint $u \in \mathcal{L}(E)$*

- *On dit que u est positif si*

$$\forall x \in E : (u(x) \mid x) \geq 0$$

- *On dit que u est défini positif si*

$$\forall x \neq 0 : (u(x) \mid x) > 0$$

On définit de même ces notions pour les matrices symétriques :

Définition II.4 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.*

34

- *On dit que M est positive si*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : {}^tXMX \geq 0,$$

- *On dit que M est définie positive si*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} : {}^tXMX > 0,$$

- On note par $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) le sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques positives (resp définies positives).

Théorème II.7 *Soit un endomorphisme autoadjoint $u \in \mathcal{L}(E)$. u est positif (resp défini positif) si et seulement si $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$ (resp $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$).*

35

Preuve: $\Longrightarrow$. Si λ est valeur propre de u et $x \neq 0$ vecteur propre associé, alors $(x \mid u(x)) = (x \mid \lambda x) = \lambda \|x\|^2$.

$\Longleftarrow$. Soit $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ b.o.n de E formée de vecteurs propres de u, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres associées. Alors pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$,

$$(x \mid u(x)) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i \varepsilon_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2 \in \mathbb{R}_+$$

36

Théorème II.8 *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme u^*u est autoadjoint positif et*

$$|||u|||_2 = |||u^*|||_2 = \sqrt{|||u^*u|||_2}.$$

Preuve: Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme u^*u autoadjoint et pour tout $x \in E$:

$$(u^*u(x) \mid x) = (u(x) \mid u(x)) = \|u(x)\|^2 \geq 0.$$

Donc u^*u est positif et si $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ désignent les n valeurs propres (distinctes ou non) de u^*u, associée aux vecteurs

37

d'une b.o.n $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ de E. Pour tout $x = \sum\limits_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$

$$\|u(x)\|^2 = (u^*u(x) \mid x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i) \|x\|^2$$

et avec $x = \varepsilon_j$ où j est tel que $\max\limits_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i) = \lambda_j$, on a égalité. Donc $|||u|||^2 = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i)$. De la même façon

$$\|u^*u(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \varepsilon_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |x_i|^2$$

38

conduit à $\|u^*u\|_2^2 = \max_{1\leq i\leq n}(\lambda_i^2) = \left(\max_{1\leq i\leq n}(\lambda_i)\right)^2$. Reste à montrer que $\|u\|_2 = \|u^*\|_2$, pour celà, on montre le

Lemme II.1 *Pour tout* $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$\|u\| = \sup_{x,y\in E \text{ tq } \|x\|=1 \text{ et } \|y\|=1} |(u(x) \mid y)| .$$

En effet: Si $u = 0$, l'égalité est évidente, si non $\forall x, y \in E$:

$$|(u(x) \mid y)| \leq \|u(x)\| \, \|y\| \leq \|u\| \, \|x\| \, \|y\| ,$$

donc

$$\sup_{x,y\in E \text{ tq } \|x\|\leq 1 \text{ et } \|y\|\leq 1} |(u(x) \mid y)| \leq \|u\| .$$

39

D'autre $|(u(x) \mid y)|$ vaut $\|u\|$ pour $x = x_0$ vérifiant $\|u\| = \|u(x_0)\|$, $\|x_0\| = 1$ et $y = \dfrac{u(x_0)}{\|u(x_0)\|}$.

II.2 Automorphismes orthogonaux

Définition II.5 *Un endomorphisme* $u \in \mathcal{L}(E)$ *est dit orthogonal si :*

$$\forall (x, y) \in E^2 : (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y) .$$

Dans ce cas on a

$$\forall x \in E : \|u(x)\| = \|x\|$$

ce qui signifie que u *est une* ***isométrie*** *donc un* ***automorphisme*** *de* E.

40

- On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux sur E, remarquons que $\mathcal{O}(E) \subset GL(E)$.

Théorème II.9 $\mathcal{O}(E)$ *est un sous groupe de* $GL(E)$, *appelé le groupe orthogonal de* E.

Preuve: La faire en exercice.

- En dimension 1 les applications linéaires sont les homothéties, donc
$$GL(E) = \{\lambda \mathrm{Id}_E ; \lambda \in \mathbb{R}^*\} \text{ et } \mathcal{O}(E) = \{\mathrm{Id}_E ; -\mathrm{Id}_E\} .$$
on suppose par la suite que $\dim(E) = n \geq 2$.

Théorème II.10 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$, *les propositions suivantes sont équivalentes :*

41

(i) u *est un automorphisme orthogonal*
(ii) u *transforme toute b.o.n en b.o.n.*
(iii) $\forall x \in E : \|u(x)\| = \|x\|$
(iv) $u^*u = uu^* = I_E$

Preuve: (i)$\Longleftrightarrow$(ii). les conditions

$$(u(e_i) \mid u(e_j)) = (e_i \mid e_j) = \delta_{ij}$$

pour tout $i, j \in [1, n]$, caractérisent les b.o.n.
(i)$\Longleftrightarrow$(iii). Utiliser les identités de polarisation.
(i)$\Longleftrightarrow$(iv). Remarquer que pour tout $x, y \in E$:

$$(u(x) \mid u(y)) = (u^*u(x) \mid y)$$

42

donc

$$(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y) \Longleftrightarrow (x - u^*u(x) \mid y) = 0$$

Proposition II.2 *Pour tout* $u \in \mathcal{O}(E)$, $|\det u| = 1$, *i.e.* $\det u \in \{-1; 1\}$ *et* $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1; 1\}$.

Preuve: $\det u = \det u^*$ et $\det(u^*u) = 1$. Pour le spectre si $u(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$, alors $\|u(x)\| = \|x\|$ et $\|u(x)\| = |\lambda| \, \|x\|$.

Théorème II.11 *L'ensemble* $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det u = 1\}$ *est un sous groupe de* $\mathcal{O}(E)$, *il est appelé le* groupe spécial orthogonal *de* E.

43

Preuve: C'est le noyau du morphisme de groupe

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{O}(E), \circ) & \longrightarrow & (\{-1; 1\}, \times) \\ u & \longmapsto & \det u \end{array}$$

Symétrie orthogonale, réflexion

Définition II.6 *Soit* F *un sev de* E. *La symétrie autour de* F *parallélement à* $F^\perp$ *est appelée symétrie orthogonale par rapport à* F. *On la notera* s_F.

- On a donc
$$s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$$

44

- Si $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ est une b.o.n de F,
$$s_F(x) = 2\sum_{i=1}^{p} (x \mid \varepsilon_i)\, \varepsilon_i - x$$

Proposition II.3 *Toute symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal.*

Preuve: La faire ...

Définition II.7 *Soit* H *un hyperplan de* E. *La symétrie orthogonale par rapport* H *est appelée réflexion d'hyperplan* H.

Remarque II.1 *les réflexions sont des endomorphismes orthogonaux négatifs (i.e de déterminant* -1*).*

45

- Si $H = \{u\}^\perp$ avec $\|u\| = 1$,
$$s_H(x) = x - 2\,(x \mid u)\, u$$

Théorème II.12 *Soient* u, v *deux vecteurs de* E *tels que* $\|u\| = \|v\|$ *et* $u \neq v$. *Il existe une unique réflexion* f *de* E *telle que* $f(u) = f(v)$.

Preuve: On a $\|u\|^2 = \|v\|^2$ donc $(u + v \mid u - v) = 0$. Soient $a = (u - v)$, $H = \{a\}^\perp$ et $f = s_F$, alors $f(u - v) = -(u - v)$

46

et $f(u+v)=u+v$, donc

$$f(u)=f\left(\frac{u+v}{2}\right)+f\left(\frac{u-v}{2}\right)=\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}=v$$

II.3 Matrices orthogonales

Théorème II.13 *Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) ${}^tMM=I_n$ (oubien $M\,{}^tM=I_n$), i.e : $M\in GL_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1}={}^tM$.
(ii) Les colonnes de M forment une b.o.n de $\mathbb{R}^n$.
(iii) Les lignes de M forment une b.o.n de $\mathbb{R}^n$.

47

Définition II.8 *Une matrice est dite orthogonale si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes (i),(ii) ou (iii).*
On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition II.4 *Si $M\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors*

$$\det M=\pm1 \text{ et } \mathrm{Sp}(M)\subset\{-1;1\}.$$

- On note $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$) l'ensembles des matrices orthogonales de déterminant 1 (respectivement -1).

Théorème II.14 *Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux b.o.n de E alors la matrice de passage $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est orthogonale.*

48

Théorème II.15 *Soit $\mathcal{B}$ une b.o.n de E, $f\in\mathcal{L}(E)$ et $M=\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$, on a l'équivalence :*

$$f\in\mathcal{O}(E)\Longleftrightarrow M\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

Preuve: A faire...

Théorème II.16 *$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est appelé le groupe orthogonal d'ordre n et $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ le groupe spécial orthogonal.

Remarque II.2 *$\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ n'a pas une structure de groupe. Pourquoi ?*

49

On déduit du théorème spectral que

Théorème II.17 *Toute $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique est diagonalisable et il existe $P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que*

$$M={}^tPDP=P^{-1}DP.$$

Théorème II.18 *Pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tAA\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (et si $A\in GL_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tAA\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$). Et*

$$\sqrt{\|{}^tAA\|_2}=\|A\|_2=\|{}^tA\|_2.$$

Preuve: Déjà établi pour les endomorphismes.

50

Formes quadratiques dans un espace euclidien

Théorème II.19 *Soit E un espace euclidien. Si q est une forme quadratique sur E, alors il existe une base orthonormée pour le produit scalaire et orthogonale pour q.*

En effet: Si M est une matrice symétrique représentant q dans une base de E, alors il existe P orthogonale telle que ${}^tPMP$ soit diagonale, mais la matrice ${}^tPMP$ représente q dans la base formées par les vecteurs colonnes de P.

Décomposition polaire

Théorème II.20 *Pour toute matrice $M\in GL_n(\mathbb{R})$, il existe un couple unique $(Q,R)\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M=QR$.*

51

Preuve: *Existence.* Si $M\in GL_n(\mathbb{R})$, ${}^tMM\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc ${}^tMM={}^tPDP$ avec $P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D=diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$, $\lambda_i>0$. On pose $R={}^tP\Delta P$ où $\Delta=\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},...,\sqrt{\lambda_n}\right)$, alors ${}^tMM=R^2$ et $R\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose $Q=MR^{-1}$, alors

$${}^tQQ={}^tR^{-1}\,{}^tMMR^{-1}={}^tR^{-1}\,{}^tRRR^{-1}=I_n.$$

Unicité. Si $M=QR$ avec $(Q,R)\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors ${}^tMM=R^2$. Il faut donc montrer que si $R^2=S^2$ avec $R,S\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $R=S$. En effet, montrons d'abord que dans ce cas R et S commutent. On note $\lambda_1,...,\lambda_n$ les valeurs propres (toutes strictement positives) de R et $\varphi\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall i\in[\![1,n]\!]:\varphi(\lambda_i^2)=\lambda_i$$

52

donc si $R=P\mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)P^{-1}$, alors

$$R^2=P\mathrm{diag}\left(\lambda_1^2,...,\lambda_n^2\right)P^{-1}$$

et $\varphi\left(R^2\right)=P\mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)P^{-1}=R$. Donc R est un polynôme en R^2, de même S est un polynôme en S^2 et comme $S^2=R^2$ alors R et S commutent. D'autre part

$$0=R^2-S^2=(R-S)(R+S)$$

et $R+S$ inversible, car si $(R+S)X=0$, $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$0={}^tX(R+S)X={}^tXRX+{}^tXSX$$

donc

$$0\le{}^tXRX=-{}^tXSX\le0$$

et parconséquent $X=0$. On conclut donc que $R-S=0$.

53

II.4 Problème aux moindres carrés

On considère une matrice $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $b\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le problème aux moindres carrés lié au système linéaire

$$X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}):AX=b \tag{II.1}$$

est par définition le problème de minimisation :

$$\min_{X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\|AX-b\|^2 \tag{II.2}$$

$\|AX-b\|$ étant la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Le problème (II.2) consiste donc à déterminer le (ou les) vecteur (s) $X^*\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}):\|AX^*-b\|^2\le\|AX-b\|^2 \tag{II.3}$$

54

Théorème II.21 *Le problème de minimisation (II.2) est équivalent au système linéaire*

$$X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) : {}^tAAX = {}^tAb \tag{II.4}$$

En particulier si $\operatorname{rang}(A) = p$*, le problème (II.2) admet une solution unique appelée la meilleure solution approchée au sens quadratique du système d'équations linéaires (II.1).*

Preuve: Il s'agit de montrer que toute solution X^* du système (II.4) vérifie (II.3) et réciproquement. Soit donc $X^* \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ solution de (II.4), alors ${}^tAAX = {}^tAb$ et pour tout

55

$Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}(AX^* - b \mid AY) &= {}^t(AY)\,(AX^* - b)\\ &= {}^tY\left({}^tAAX^* - {}^tAb\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

donc $(AX^* - b) \in (\operatorname{Im} A)^\perp$ et $AX^* = p_{\operatorname{Im} A}(b)$. Par conséquent $\|AX^* - b\| = \min\limits_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - b\|$.

Réciproquement, si $\|AX^* - b\| = \min\limits_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - b\|$, alors d'après la caractérisation de la projection orthogonale théorème **I.10**, $AX^* = p_{\operatorname{Im} A}(b)$ et $(AX^* - b) \in (\operatorname{Im} A)^\perp$, c.à.d pour tout $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$$(AX^* - b \mid AY) = 0$$

56

donc pour tout $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$$\left({}^tA\,(AX^* - b) \mid Y\right) = 0$$

ce qui signifie que ${}^tA\,(AX^* - b) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^\perp = \{0\}$.

En particulier si $\operatorname{rang}(A) = p$ alors ${}^tAA \in GL_p(\mathbb{R})$ est par conséquent le système (II.4) admet une et une seule solution.

II.5 Exemples de factorisation de matrices

Factorisation QR

Théorème II.22 *Pour toute matrice* $M \in GL_n(\mathbb{R})$*, il existe un unique couple* $(Q, R) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ *(Q orthogonale et R triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont strictement positifs) tel que* $M = QR$.

57

Preuve: *Existence.* Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{C} = (c_1, ..., c_n)$ ces vecteurs colonnes forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'algorithme de Gram Schmidt, permet d'othonormaliser la base $\mathcal{C}$ et d'obtenir une b.o.n $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, la matrice de passage $T = \mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ étant triangulaire supérieure, pour laquelle on peut supposer que les éléments diagonaux sont strictement positifs (voir remarque **I.2**), c.à.d $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$. Et par définition d'une matrice de passage, si P désigne la matrice dont les vecteurs colonnes sont $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, on a

$$P = MT$$

de sorte que $M = PT^{-1}$, on pose alors $Q = P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R = T^{-1} \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$.

58

Unicité. Si $M = QR$ alors ${}^tMM = {}^tRR$, l'unicié de R résulte alors de l'unicité de la factorisation de Cholesky ci-après.

Factorisation de Cholesky

Théorème II.23 *Si M est une matrice symétrique définie positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice L triangulaire inférieure à coefficients diagonaux positives telle que $M = L{}^tL$.*

Preuve: *Existence.* Si M est une matrice symétrique définie positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe aumoins une matrice inversible P telle que

$$M = {}^tPP$$

59

puis d'après la factorisation QR, $P = QT$ et

$${}^tPP = {}^tT{}^tQQT = {}^tTT$$

on pose alors $L = {}^tT$.

Unicité. Si $L{}^tL = R{}^tR$ alors

$${}^tL\left({}^tR\right)^{-1} = RL^{-1},$$

égalité de matrices triangulaire supérieure avec triangulaire inférieure, donc RL^{-1} est diagonale. D'autre part, si on pose $R = (r_{i,j})$ et $L = (\ell_{i,j})$, alors les coefficients diagonaux des deux matrices ${}^tL\,({}^tR)^{-1}$ et RL^{-1} sont respectivement $\ell_{j,j}/r_{j,j}$ et $r_{j,j}/\ell_{j,j}$ qui sont égaux. Et comme les coefficients $\ell_{j,j}$ et $r_{j,j}$ sont positifs, alors $\ell_{j,j} = r_{j,j}$ et $RL^{-1} = I_n$ c.à.d $R = L$.

60

Exemples

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Avec l'exemple **I.1**, on a $M = QR$, en posant

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ R = T^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

61