Rappels d'Algèbre linéaire

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}-ev$.

I Généralités

Dans ce paragraphe I désigne un ensemble quelconque non vide, et $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, indexée par I. $\mathcal{P}_f(I)$ désigne l'ensemble des parties finies de I.

I.1 Famille libres-Familles liées

Définition I.1
- Un vecteur x de E est dit combinaison linéaire de la famille $(e_i)_{i\in I}$, s'il existe $J \in \mathcal{P}_f(I)$, tel que :
$$\exists(\alpha_j)_j \in J; \quad x = \sum_{j\in J} \alpha_j e_j$$
On écrit, $x \in Vect\{e_i \ / \ i \in I\}$
- $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre si, toutes ses sous familles finies sont libre.
i.e : $\forall J \in \mathcal{P}_f(I), \forall(\alpha_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^{card(J)}$: $\left(\sum_{j\in J} \alpha_j e_j = 0 \Longrightarrow \forall j \in J, \alpha_j = 0\right)$
Dans le cas contraire, on dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille liée

(1) Dans $\mathbb{K}[X]$, toute famille de polynômes non nuls, et de degrés échelonnés est libre ; en particulier $\{X^n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est libre.
On rappelle qu'une famille $(P_i)_{i\in I}$ de polynômes est dite de degrés échelonnés, si pour tout $i \neq j$ on a $deg(P_i) \neq deg(P_j)$

(2) Si f est une fonction numérique, continue non constante sur un intervalle non vide, et non réduit à un singleton ; alors la famille $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

Proposition I.1 (Cas où $I = \mathbb{N}$) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(e_0, \ldots, e_n)$ est libre.

Remarque I.1 Toutes les propriétés des familles libres ou liées finies, restent les mêmes pour les familles libres ou liées dans le cas général.

I.2 Famille génératrice- Base d'un $\mathbb{K}-ev$

Définition I.2
- On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, si tout vecteur de E, en est une combinaison linéaire. Dans ce cas $E = Vect\{e_i \ / \ i \in I\}$
- Une base de E, est une famille qui est à la fois génératrice et libre dans E.
On convient que $vect(\emptyset) = \{0\}$

(1) $\{X^n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}, \{1, X, \ldots, X^n\}$ est une base du $\mathbb{K}-ev; \mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degrés inférieurs ou égal à n

(3) Pour tout $a \in \mathbb{K}$; $\{(X-a)^n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. Ceci résulte de la formule de Taylor en a, d'un polynôme P non nul de degré n :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(a)}{k!}(X-a)^k$$

(4) $x_0, \ldots, x_n$ des scalaires deux à deux distincts. Posons pour tout $k \in [|0,n|], L_k(X) = \prod_{i\neq k} \dfrac{X-x_i}{x_k - x_i}$.
$\{L_0, \ldots, L_n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée base de Lagrange.

Caractérisation : Soit A une parie non vide de E, alors $vect(A)$ est le plus petit s.e.v de E engendré par A

Proposition I.2 Soit A et B deux paries de E.
- $vect(vect(A)) = vect(A)$
- Si F est un s.e.v de E, alors $(A \subset F \Longleftrightarrow vect(A) \subset F)$
- $A \subset B \Longrightarrow vect(A) \subset vect(B)$
- $vect(A \cup B) = vect(A) + vect(B)$
- Si B est une famille libre de E, et $x \in E$ tel que $B \cup \{x\}$ est liée alors $x \in vect(B)$.
  En conséquence si B est libre, et que pour tout $x \in E, B \cup \{x\}$ est liée, alors B est génératrice de E.

I.3 Somme finie de sous espaces vectoriels de E

Définition I.3
- Soient $E_1, \cdots, E_n$ une famille finie de sous espaces vectoriels de E. La somme des s.e.v $E_1, \cdots, E_n$ est le s.e.v de E, noté $\sum_{i=1}^{n} E_i$;

$$\forall x \in E, \quad x \in \sum_{i=1}^{n} E_i \Longleftrightarrow \exists (x_1, \cdots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i; \ \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- On dit que la somme de $E_1, \cdots, E_n$ est directe, si :

$$\forall x \in E, \quad x \in \sum_{i=1}^{n} E_i \Longleftrightarrow \exists ! (x_1, \cdots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i; \ \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

  Dans ce cas là, on note leur somme par $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$
- On dit que $E_1, \cdots, E_n$ sont des s.e.v supplémentaires de E, si $E = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$.

Caractérisation : $E_1, \cdots, E_n$ sont en somme directe, si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est isomorphe à $\prod_{i=1}^{n} E_i$.

Proposition I.3 $E_1, \cdots, E_n$ sont en somme directe, si et seulement si,

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \ \ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0 \right)$$

Proposition I.4 Si $E_1, \cdots, E_n$ sont supplémentaires dans E, et $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$ sont des bases de $E_1, \cdots, E_n$ respectivement ; alors $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ est une base de E.

Proposition I.5 Soit $n \geq 2$. $E_1, \cdots, E_n$ une famille de s.e.v de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $E = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$

(2) $\begin{cases} E = \sum_{i=1}^{n} E_i \\ \forall i \in [|1,n|], \quad E_i \cap \sum_{j\neq i} E_j = \{0\} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} E = \sum_{i=1}^{n} E_i \\ \forall i \in [|2,n|], \quad E_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} E_j = \{0\} \end{cases}$

I.4 Codimension d'un sous espace vectoriel

Définition I.4 Soit F un s.e.v de E. On dit que F est de codimension finie dans E, si F possède un supplémentaire G de dimension finie dans E ; et on a :

$$codim(F) = dim(G)$$

Exemple I.1 Soit $E = \mathbb{K}[X]$, et $P \in E$, un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

$$F = \{Q \in E \ / \ P \text{ divise } Q\}$$

F est un sous espace vectoriel de supplémentaire $\mathbb{K}_n[X]$ dans E, donc sa codimension est n.

Caractérisation des hyperplans : H est un hyperplan de E, si et seulement si, H est de codimension 1.

Remarque I.2 Lorsque E est un $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie, alors la codimension d'un sous espace vectoriel F est $dim(E) - dim(F)$.

Proposition I.6 Soit F et G deux s.e.v de E, tels que $F \subset G$, et F de codimension finie dans E ; alors G est de codimension finie dans E, et on a :

$$codim(G) \leq codim(F) \quad \text{et} \quad (F = G \Longleftrightarrow codim(F) = codim(G)$$

II Matrices et applications linéaires

II.1 Matrice d'une application linéaire.

Définition II.1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel tels que $\dim E = p$ et $\dim F = n$. Soient $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leq i\leq p}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de F et $u : E \to F$ une application linéaire. On appelle la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \left(a_{i,j}\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

dont la j-ème colonne est formée par les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$, c.à.d :

$$\forall j \in [\![1, p]\!] : u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i .$$

Dans le cas où $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on note tout simplement $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, c'est alors une matrice carrée.

Remarque II.1 (1) Avec ces notations, si $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \in E$, et $y = u(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i e'_i \in F$, alors

$$Y = MX$$

où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

représentent les matrices colonnes formées par les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et y dans $\mathcal{B}'$.

(2) L'application $u \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(3) En plus si G est un autre $\mathbb{K} - ev$ et $\mathcal{B}''$ une base de G, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v).\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$$

pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. En particulier l'application

$$u \in \mathcal{L}(E) \longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

est un isomorphisme d'algèbre.

(4) Ce qui permet de déduire que, $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est inversible si et seulement si u est un isomorphisme et dans ce cas

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(u^{-1}).$$

Matrice en tant qu'application linéaire

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application

$$\mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n;\ X \longmapsto MX$$

est linéaire. On définit alors comme pour les applications linéaires $\ker M$ et $\operatorname{Im} M$:

(1) $X \in \ker M \Longleftrightarrow X \in \mathbb{K}^P$ et $MX = 0$.

(2) $Y \in \operatorname{Im}(M) \Longleftrightarrow Y \in \mathbb{K}^n$ et $\exists X \in \mathbb{K}^p$ tel que $Y = MX$. En particulier $\operatorname{rang}(M) = \dim \operatorname{Im}(M)$.

II.2 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition II.2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = \left(V_1, ..., V_p\right)$ une famille de p vecteurs de E, la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \left(a_{i,j}\right) \in \mathcal{M}_{n,p}\,(\mathbb{K})$telle que

$$\forall j \in [\![1, p]\!] : V_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i\ .$$

dont les colonnes sont formées par les coordonnées des éléments de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$.

Exemple II.1 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$ et en général : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\left(\lambda_1 e_1, ..., \lambda_n e_n\right) = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Proposition II.1 Avec les notations de la définition précédente on a :

$$\operatorname{rang}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})\right) = \operatorname{rang}(\mathcal{C}).$$

En particulier $\mathcal{C}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est inversible.

II.3 Matrice de passage entre deux bases

Définition II.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E de dimension n. La matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ est la la matrice carrée d'ordre n notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ définie par :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2).$$

Remarque II.2 On a aussi $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(id_E)$. Ce qui permet de déduire

Les formules de changement de bases

Si $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}\,(\mathbb{K})$ désigne la matrice colonne formée par les coordonnés de x dans $\mathcal{B}_1$ et $X_2 \in \mathcal{M}_{n,1}\,(\mathbb{K})$ celle formée par ses coordonnées dans $\mathcal{B}_2$ alors on a la formule de changement de base

$$X_1 = PX_2\ .$$

et si F est un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ deux bases de F, alors pour tout $u \in \mathcal{L}\,(E, F)$, si on pose $M_2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_2}(u)$, $M_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1}(u)$ et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2}$, $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ on a la formule

$$M_2 = P^{-1} M_1 Q,$$

on dit alors que M_1 et M_2 sont équivalentes.

Exercice II.1 Montrer que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

En particulier si $E = F$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}'_1$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}'_2$ et $M_2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u)$, $M_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u)$ alors

$$M_2 = P^{-1} M_1 P,$$

on dit alors que M_1 et M_2 sont semblables.

II.4 Rang d'une application linéaire

Définition II.4 Soit $u \in \mathcal{L}(E; F)$. Si $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie, on pose $\operatorname{rang} u = \dim(\operatorname{Im} u)$.

Remarque II.3 $\operatorname{rang} u$ est défini si $\dim E$ ou $\dim F$ finie et dans ce cas

$$\operatorname{rang} u \leq \min(\dim E, \dim F).$$

Théorème II.1 (de factorisation) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. tout supplémentaire de $\ker u$ est isomorphe $\operatorname{Im} u$. En particulier si $\dim E$ est finie, on a :

$$\dim E = \dim \ker u + \dim \operatorname{Im}(u) \qquad \text{(formule du rang)}$$

Preuve: Si H vérifie :

$$E = \ker u \oplus H,$$

on considère l'application

$$h \in H \longmapsto u(h) \in \operatorname{Im} u$$

on vérifie que c'est un isomorphisme de $\mathbb{K} - ev$.

Propriétés en dimension finie :

(1) Le rang d'une application linéaire est égale au rang de sa matrice dans toutes bases.
(2) u est injective si et seulement si $\operatorname{rang}(u) = \dim E$.
(3) u est surjective $\operatorname{rang}(u) = \dim F$.
(4) u est bijective $\operatorname{rang}(u) = \dim E = \dim F$.
(5) Si $\dim E = \dim F$, alors

$$u \text{ bijective } \iff u \text{ injective } \iff u \text{ injective}$$

Proposition II.2 Le rang est invariant par composition à gauche ou à droite par un isomorphisme. Autrement dit si u est linéaire et v isomorphisme alors : $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$ et $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(u)$.

Preuve: Utiliser les matrices.

II.5 Déterminant

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Définition II.5 Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, noté $\det(A)$ est par définition le scalaire :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \text{ noté aussi } \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Développement selon ligne ou colonne

Proposition II.3 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en enlevant la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne. De même

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

- $\det(A_{i,j})$ s'appelle cofacteur d'indice (i, j), la matrice formée par ses cofacteurs s'appelle comatrice de A et se note $Com(A)$. On montre que

$$A^t com(A) = \det(A) I_n.$$

Remarque II.4 $\det(I_n) = 1$ et en général le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Propriétés

(1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(2) Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t Com(A)$$

(3) Si P est inversible alors $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition II.6 Soit $\mathcal{B}$ une base de E tel que $\dim E = n$. On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$, d'une famille $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ de n vecteurs de E, le scalaire

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$$

Proposition II.4 Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et $\mathcal{B}'$ famille d'éléments de E tel que $\mathcal{C}\mathrm{ard}\mathcal{B}' = \dim E$, on a les résultats suivants :

- $\mathcal{B}'$ est liée si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 0$.
- $\mathcal{B}'$ est libre si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$.
- $\mathcal{B}'$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$, et dans ce cas on a :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}$$

- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det(P)$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Déterminant d'un endomorphisme.

Définition II.7 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\right)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E, on pose alors

$$\det(u) = \det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\right)$$

et on l'appelle le déterminant de u.

Proposition II.5 Soit $u, v : E \longrightarrow E$ deux endomorphismes de E tel que $\dim E = n$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (x_1, \ldots, x_n)$ famille d'éléments de E, on a les résultats suivants :

- $\det(id_E) = 1$.
- $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}')) = \det(u)\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
- $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$.
- u est un automorphisme de E si et seulement si $\det(u) \neq 0$, avec $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

III Matrices par blocs

III.1 Définitions

- On appelle matrice par blocs, toute matrice de $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de la forme

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & \cdots & A_{1,\ell} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{k,1} & \cdots & A_{k,\ell} \end{array}\right)$$

où A_{ij} sont des matrices de $\mathbb{M}_{n_i,p_j}$ telles que $\sum n_i = n$ et $\sum p_j = p$

- La matrice A est diagonale par blocs, si elle est de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & (0) & \cdots & (0) \\ \hline (0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ \hline (0) & \cdots & (0) & A_{k,k} \end{array}\right)$$

- On dit qu'elle est triangulaire supérieure (resp. inférieure) par blocs, si elle est de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & \cdots & \cdots & A_{1,k} \\ \hline (0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline (0) & \cdots & (0) & A_{k,k} \end{array}\right) \quad \left(\text{resp } A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & (0) & \cdots & (0) \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ \hline A_{k,1} & \cdots & \cdots & A_{k,k} \end{array}\right)\right).$$

III.2 Calcul par blocs

Sommation par blocs : Soient A et B deux matrices par blocs :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & \cdots & A_{1,\ell} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{k,1} & \cdots & A_{k,\ell} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad B = \left(\begin{array}{c|c|c} B_{1,1} & \cdots & B_{1,\ell} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{k,1} & \cdots & B_{k,\ell} \end{array}\right)$$

où A_{ij} et B_{ij} sont des matrices de $\mathbb{M}_{n_i,p_j}$ telles que $\sum n_i = n$ et $\sum p_j = p$

On définit la sommation par blocs de A et B par :

$$A + B = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} + B_{1,1} & \cdots & A_{1,\ell} + B_{1,\ell} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{k,1} + B_{k,1} & \cdots & A_{k,\ell} + B_{k,\ell} \end{array}\right)$$

Multiplication par un scalaire : Pour $\lambda \in \mathbb{K}$;

$$\lambda A = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda A_{1,1} & \cdots & \lambda A_{1,\ell} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \lambda A_{k,1} & \cdots & \lambda A_{k,\ell} \end{array}\right)$$

Produit par blocs : Soient $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, telles que :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & \cdots & A_{1,\ell} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{k,1} & \cdots & A_{k,\ell} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad B = \left(\begin{array}{c|c|c} B_{1,1} & \cdots & B_{1,m} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{\ell,1} & \cdots & B_{\ell,m} \end{array}\right)$$

où ; pour tout $(i,j) \in [|1,k|] \times [|1,l|]$, $A_{ij} \in \mathbb{M}_{n_i,p_j}$ et $\sum n_i = n$, $\sum p_j = p$

Pour tout $(i,j) \in [|1,l|] \times [|1,m|]$, $B_{ij} \in \mathbb{M}_{p_i,q_j}$ et $\sum p_i = p$, $\sum q_j = q$

Le produit par blocs des matrices A et B est donné par :

$$A.B = \left(\begin{array}{c|c|c} C_{1,1} & \cdots & C_{1,m} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline C_{k,1} & \cdots & C_{k,m} \end{array}\right) \quad \text{où} \quad C_{i,j} = \sum_{s=1}^{\ell} A_{i,s} B_{s,j}$$

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs : Étant donnée une matrice A triangulaire par blocs, telle que

$$A == \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & (0) & \cdots & (0) \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ \hline A_{k,1} & \cdots & \cdots & A_{k,k} \end{array}\right)$$

Alors,

$$det(A) = \prod_{i=1}^{k} det(A_{ii})$$

En conséquence, A est inversible, si et seulement si, toutes les matrices A_{ii}, $(i = 1..k)$ sont inversibles.

IV Sous espaces vectoriels stables

IV.1 Définition ; exemples

Définition IV.1 Soit f un endomorphisme de E, et F un sous espace vectoriel de E. On dit que F est stable par f, si ;

$$f(F) \subseteq F$$

Remarque IV.1 Si F est un sous espace vectoriel stable par f, et g l'application linéaire induite par f sur F, alors g prend ses valeurs dans F, et $g: \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est un endomorphisme de F.

(1) $\{0\}$ et E sont stables par tous les endomorphismes de E

(2) Tous les sous espaces vectoriels de E sont stables par Id_E

(3) Si f est une homothétie (i.e : $f = \lambda Id_E$), alors tous les sous espaces vectoriels de E sont stables par f

Proposition IV.1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et F un s.e.v de E, engendré par une famille $\{e_i \ / \ i \in I\}$, alors F est stable par f, si et seulement si pour tout $i \in I$, $f(e_i) \in F$

Exemple IV.1 Si f est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence $p \in \mathbb{N}^*$, et $e \in E$ tel que $f^{p-1}(e) \neq 0$, alors $F = Vect(e, f(e), \cdots, f^{p-1}(e))$ est stable par f.

IV.2 Propriétés remarquables des s.e.v stables

Proposition IV.2 Pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$, alors le noyau et l'image de chacun est stable par l'autre

Corollaire IV.1 $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $Ker(f - \lambda Id_E)$ et $Im(f - \lambda Id_E)$ sont stables par f. En particulier, le noyau et l'image de f sont stables par f

Proposition IV.3 Soient $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de sous espaces vectoriels stables par un endomorphisme f de E, alors $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est stable par f.

Proposition IV.4 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

(1) Si F est un sous espace vectoriel stable par f, alors la matrice de f dans toute base adaptée à F est triangulaire par blocs, de la forme ;

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array}\right) \text{ où } A \text{ est la matrice de la restriction de } f \text{ à } F.$$

(2) Soient $(E_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de sous espaces vectoriels supplémentaires, et stables par f, alors la matrice de f dans une base adaptée à $\underset{1\leq i\leq p}{\oplus} E_i$, est diagonale par blocs. le i-ème bloc de la diagonale correspond à la matrice de la restriction de f au s.e.v E_i

(1) Soit p un projecteur sur E, la matrice de p dans une base adaptée à la somme directe $Imp \oplus Kerp$, est :

$$J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right)$$

où r désigne le rang de p, et I_r est la matrice identité d'ordre r

(2) u une involution sur E, alors la matrice de u, dans une base adaptée à la somme directe, $E = Ker(Id_E - u) \oplus Im(Id_E - u)$ est

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & (0) \\ \hline (0) & -I_{n-r} \end{array}\right)$$

où r désigne le rang de $Id_E - u$