Exercice 1 Etudier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes:

$N_\infty : (x,y) \longmapsto \|(x,y)\|_\infty$, $N_1 : (x,y) \longmapsto \|(x,y)\|_1$, $N_2 : (x,y) \longmapsto \|(x,y)\|_2$.

Exercice 2 Soit f une application dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $t \longrightarrow \|f(t)\|_2$ est dérivable en tout point $t \in I$ tel que $f(t) \neq 0$ et donner sa dérivée en t.

Exercice 3 Soit n un entier impair et M une application de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{R})$, dérivable et telle que pou tout x réel, ${}^tM(x)M(x) = I_n$. Montrer alors que pour tout x, $M'(x)$ n'est pas inversible.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+2y^2)\sin(\dfrac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } & x = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité et la diféreniabilité de f. Etudier les dérivées partielles de f .

Exercice 5 Mêmes questions pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Déterminer les dérivés secondes en $(0,0)$ de la fonction f.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0)\,, \quad f(0,0) = 0\,.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. En quels points f admet-elle une dérivée partielle par rapport à x ? Même question pour $\partial f/\partial y$.

Exercice 7 Trouver les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+$ pour lesquelles la fonction suivante est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}, \text{ si } xy \neq 0 \\ f(x,0) = f(0,y) = 0. \end{cases}$$

Exercice 8 Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{g(xy)}{1+y^2}$ admet des dérivées partielles à l'ordre 1. Les calculer en fonction de g et g'.

Exercice 9 Soit φ une fonction continue. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)dt$ admet des dérivées partielles à l'ordre 1 ; les calculer en fonction de φ.

Exercice 10 Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = 0$ si $uv = 0$ et $g(u,v) = 1$ si $uv \neq 0$.

1. Montrer que g admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ et n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Montrer que la fonction $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$h(x,y) = g(x^2+y^2, x^2+y^2)$$
n'admet pas de dérivées partielles en $(0,0)$.

Exercice 11 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées des fonctions suivantes:

1. $g(x,y) = f(y,x)$.
2. $g(x) = f(x,x)$.
3. $g(x,y) = f(y, f(x,x)$.
4. $g(x) = f(x, f(x,x))$.

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y) = (f(x,y), 2xy)$. Trouver une condition nécéssaire et suffisante sur f pour que $dF_{(x,y)}$ soit une similitude.

Exercice 13 $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. On définit F sur $\mathbb{R}^2$par $F(x,y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ si $x \neq y$ et $F(x,x) = f'(x)$.

1. Ecrire $F(x,y)$ sous forme d'une intégrale.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.