

Exercice 1 Soient $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit f l'endomorphisme associé à la matrice A .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Uniquement* en examinant la matrice A , trouver deux valeurs propres et un vecteur propre de A , puis deux sous-espaces f -stables.
2. Que représente la matrice B ?

Exercice 2 Soit J la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une relation entre J et J^2 .
2. En déduire les valeurs propres de J et calculer leurs multiplicités.
3. Donner le polynôme caractéristique de J .

Exercice 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on suppose inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A , alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A .
2. De même, montrer que si x est un vecteur propre complexe de A , alors \bar{x} (où \bar{x} désigne le vecteur dont les composantes sont les conjuguées des composantes de x) est aussi un vecteur propre complexe de A .
3. Diagonaliser

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Soit A_m la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} m & 1 & \dots & 1 \\ 1 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & m \end{pmatrix}.$$

1. Sans calculer le polynôme caractéristique de A_m , montrer que $(m-1)$ est valeur propre. Déterminer l'espace propre associé.
2. Que dire de la multiplicité de la valeur propre $(m-1)$?
3. En déduire le spectre de A_m . A_m est-elle diagonalisable?

Exercice 5 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{tr}(A) \neq 0$ et

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M \mapsto \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \text{tr}(M) = 0\}$ et $\text{vect}(A)$ sont des sous-espaces propres de f .
3. En déduire que f est diagonalisable et écrire la matrice réduite de f .

Exercice 6 Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par blocs (les matrices A et C étant des matrices carrées), démontrer que

$$\det M = (\det A)(\det C)$$

(on pourra utiliser les matrices par blocs $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$ en donnant des précisions sur les tailles des matrices qui interviennent).

Exercice 7 Soient A, B, C et D des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AC = CA$.

1. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.
2. Comparer le produit

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & B \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ 0 & \lambda I_n - AB \end{pmatrix}$$

et en déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.