

Exercice 1 Montrer qu'un idéal de $\mathbb{K}[X]$ est distinct de $\mathbb{K}[X]$ si et seulement s'il ne contient aucun polynôme constant non nul.

Exercice 2 Soient les polynômes $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^2 + X + 1$ de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer $\text{pgcd}(P, Q)$ puis la somme et l'intersection des idéaux principaux (P) et (Q) de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3 Les parties $\mathcal{I} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P'(0) = 0\}$ et $\mathcal{J} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = P'(0) = 0\}$ sont-elles des idéaux de $\mathbb{R}[X]$? Dans l'affirmative, en donner un générateur.

Exercice 4 E est un \mathbb{R} -ev de dimension 3. Montrer que tout endomorphisme de E admet une droite et un plan stables.

Exercice 5 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $P(f) = 0$. Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2)$; en déduire $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercice 6 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rang}(f - id) = 1$. On note $H = \ker(f - id)$.

1. Soit $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ une base de H et $e_n \notin H$. Montrer que $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E et donner l'allure de la matrice de f dans cette base.
2. Montrer que le polynôme $(X - 1)(X - \det(f))$ annule f . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 7 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si λ est valeur propre de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).

Exercice 8 Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E et P un polynôme. Montrer que $P(f)$ est diagonalisable.

Exercice 9 Pour quelles valeurs de a, b et c les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Exercice 10 Soit u l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ u : P &\mapsto (2X + 1)P - (X^2 - 1)P' \end{aligned}$$

Montrer que u est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de u , et, si c'est possible, diagonaliser u .

Exercice 11 E est un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que les sous espaces propres de f sont stables par g .
2. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe un vecteur propre commun à f et g .
3. On suppose que f et g sont diagonalisables. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (resp. μ_1, \dots, μ_q) les valeurs propres de f (resp. de g), et F_1, \dots, F_p les espaces propres associés (resp. G_1, \dots, G_q).
 - (a) Montrer que chaque G_j (resp. F_i) est stable par f (resp. g).
 - (b) On pose $H_{ij} = F_i \cap G_j$. Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Montrer que F_i est la somme directe des espaces $(H_{ij})_{1 \leq j \leq q}$.
 - (c) En déduire l'énoncé suivant : *Lorsque deux endomorphismes diagonalisables f et g commutent, il existe une base formée de vecteurs propres communs à f et à g (en d'autres termes, f et g sont diagonalisables simultanément dans la même base).*
4. Considérons f et g deux endomorphismes de \mathbb{R}^3 dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que $f \circ g = g \circ f$ et déterminer les sous-espaces propres de M et N .
- Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle les matrices de f et g sont diagonales.