

**Exercice 1** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$ . Montrer que  $\det A = 1$ .

**Exercice 2** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $rg(A) = 1$ . Montrer les équivalences:

(i)  $A$  est semblable à une matrice diagonale  $\iff$  (ii)  $A^2 \neq 0 \iff$  (iii)  $tr(A) \neq 0$ .

**Exercice 3** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ - $ev$  de dimension 3 et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^3 = f^2$  et  $\dim \ker(f - Id_E) = 1$ .

Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \{0; 1\}.$$

**Exercice 4** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ - $ev$  de dimension 3 et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^4 = f^2$  et  $\{-1; 1\} \subset sp(f)$ .

Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

**Exercice 5** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ - $ev$  de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que son polynôme minimal soit  $(X - 1)^2(X - 2)$ .

Trouver le polynôme minimal de  $f + Id_E$ .

**Exercice 6** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ - $ev$  de dimension  $n \geq 1$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer les équivalences:

(i)  $f$  est nilpotent  $\iff$  (ii)  $sp(f) = \{0\} \iff$  (iii)  $tr(f^k) = 0$  pour tout  $k \geq 1$ .

**Exercice 7** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Donner un polynôme annulateur de  $A$  qui est de degré 2.
2. Trouver pour tout entier  $n$  deux coefficients  $a_n, b_n$  tels que:  $A^n = a_n A + b_n I_3$ .

**Exercice 8** On considère dans  $\mathbb{R}^3$ , muni de sa base canonique, l'endomorphisme  $f$  de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer  $\ker(f - Id)^2$ .
2. Montrer que qu'il existe une base dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 9** Soient  $n \geq 1$  et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , pour tout  $P \in E$ , on pose  $f(P) = P - (X + 1)P'$ .

1. Montrer que  $f \in \mathcal{L}(E)$  et déterminer  $sp(f)$ .
2. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

**Exercice 10** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ayant  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes. On note  $\mathcal{C}(A)$  l'ensemble des matrices commutant avec  $A$ .

1. Montrer que  $\mathcal{C}(A)$  est une sous algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ayant  $n$  pour dimension.
2. Montrer que  $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$  est une base de  $\mathcal{C}(A)$  et exprimer  $A^n$  dans cette base.

**Exercice 11** Matrice stochastique.

Soit  $A$  une matrice stochastique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à coefficients strictement positifs, i.e.

$$\begin{aligned} a_{i,j} &> 0 & \forall i, j \in [1, n] \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} &= 1 & \forall i \in [1, n] \end{aligned}$$

Montrer les résultats suivants:

1. 1 est valeur propre de  $A$  et que  $E_1$  le sous-espace propre associé est de dimension égale à 1.
2. Pour toute valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  de  $A$ , on a :  $|\lambda| \leq 1$ .
3. Si  $\lambda$  est valeur propre telle que  $|\lambda| = 1$  alors  $\lambda = 1$ .