

Exercice 1 Etudier le produit de Cauchy des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ dans les cas suivants:

$$(a) x_n = y_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad (b) x_n = y_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Exercice 2 Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors leur produit de Cauchy est une série divergente.
2. Que dire si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge ?
3. On suppose que les deux séries sont convergentes et à termes quelconques. Montrer que leur produit de Cauchy converge si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k (b_n + b_{n-1} + \dots + b_{n-k+1}) = 0.$$

Exercice 3 Soit $\sum_k u_{n_k}$ un réarrangement d'une série semi-convergente $\sum_n u_n$.

Montrer que si la suite $(n_k - k)$ est bornée, alors $\sum_k u_{n_k}$ est convergente et

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{n_k} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Exercice 4 Montrer qu'une série double $(a_{n,m})$ est sommable si et seulement si

$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{i,j}$ existe. Et dans ce cas cette limite est la somme de la série double.

Exercice 5 Montrer que la série double $\sum_{i,k \geq 1} ix^{ik}$ est absolument convergente si

$$|x| < 1.$$

Prouver en plus que

$$\sum_{i,k=1}^{+\infty} ix^{ik} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx^k}{1-x^k} \stackrel{**}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma(n)x^n$$

où $\sigma(n)$ représente la somme des diviseurs positifs de n .

Exercice 6 On note $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$. on pose

$$S_p = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \zeta(p) - 1, \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}, p \geq 2.$$

Montrer que

$$\sum_{p=2}^{+\infty} S_p = 1, \quad \text{et} \quad \sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p S_p = \frac{1}{2}.$$

Exercice 7 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose

$$x_{p,q} = \frac{p+q}{(1+p)^a(1+q)^b}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la famille $(x_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ soit sommable.

Même question avec la suite

$$x_{p,q} = a^p b^q \quad \text{pour } (p,q) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } (a,b) \in \mathbb{C}^2.$$

Exercice 8 Soit la suite double

$$x_{p,q} = \frac{1}{p} \left(\frac{p-1}{p} \right)^q - \frac{1}{p+1} \left(\frac{p}{p+1} \right)^q \quad \text{pour } (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}.$$

Calculer $\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} x_{p,q}$ puis $\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} x_{p,q}$. Conclure.

Même question avec la suite double définie par

$$x_{p,q} = \frac{1}{p^2 - q^2} \quad \text{pour } p, q \in \mathbb{N} \text{ et } p \neq q.$$

Exercice 9 Pour $x \in \mathbb{C}$, $|x| \leq 1$ montrer l'égalité suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$$

indication : utiliser des séries doubles.