Exercice 1 On pose $E = \left\{(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum |x_n| \text{ converge}\right\}$. Verifier qu'il s'agit d'un espace vectoriel et que les applications $N_1(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ et N_∞ définissent des normes sur E et les comparer.

Exercice 2 Verifier que l'ensemble $E = \left\{(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum |x_n|^2 \text{ converge}\right\}$ est un espace vectoriel et que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à tout $x = (x_n)_n \in E$ associe $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2$ est une norme sur E. Montrer que si $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n \in E$ alors la série $\sum |x_n y_n|$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n y_n| \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^2}$$

Exercice 3 Soient E un e.v.n et F un sous espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\bar{F}$ est un sous espace vectoriel de E.
2. Montrer qu'un hyperplan de E est soit dense soit fermé.

Exercice 4 Soient E un e.v.n et H un hyperplan de E, $H = \ker(u)$ pour un certain $u \in E^*$.

1. Montrer que si u est continue alors H est fermé.
2. On suppose réciproquement que H est fermé, et soit $a \in E \setminus H$
   (a) Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que : $B_f(0,\varepsilon) \cap (a + H) = \varnothing$
   (b) Montrer que u est bornée sur $B_f(0,\varepsilon)$.
   (c) En déduire que u est continue.

Exercice 5 Soient A un compact non vide d'un e.v.n E et $f : A \longrightarrow A$ une application vérifiant:

$$\forall x, y \in A; x \neq y : d\left(f(x), f(y)\right) < d\left(x, y\right).$$

Montrer que f admet un et un seul point fixe.

Exercice 6 Les fonctions suivantes ont elles une limite en $(0,0)$?

$a)$ $f(x, y = (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.

$b)$ $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

$c)$ $\dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$.

$d)$ $f(x, y = \dfrac{x^2+y^2-1}{x}\sin(x)$.

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de la droite d'équation $(y = x)$ par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y : f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}.$$

Est-il possible de prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}^2$ tout entier?

Exercice 8 Soit f définie de la manière suivante:

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 + y^2 - 1, & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ f(x,y) = -\dfrac{1}{2}x^2, & \text{si } x^2+y^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10 Trouver les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+$ pour lesquelles la fonction suivante est continue sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}, \text{ si } xy \neq 0 \\ f(x,0) = f(0,y) = 0. \end{cases}$$