Exercice 1 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est muni des normes N_∞ et N_1. étudier la convergence de la suite (e_n) et la série $\sum e_n$ avec $e_n : [0,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^n$.

Exercice 2 $\mathbb{R}[X]$ est muni des normes suivantes:

$$N_1(\textstyle\sum_{k=0}^n a_k X^k) = \sum_{k=0}^n |a_k|, \qquad N_2(\sum_{k=0}^n a_k X^k) = \sup\limits_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|,$$

$$\text{et} \qquad N_3(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|,$$

étudier pour chacune de ces normes la convergence des suites $(X^n)_n$ et $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1} X^k\right)$.

Exercice 3 Dans $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $A = \{f \in E; f(0) = 0\}$ et $B = \{f \in E; f > 0\}$, sont-ils ouverts ou fermés pour les normes N_∞, N_1 et N_2.

Exercice 4 Dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$, on considère les ensembles : $S_0 = \{$ suites stationnaires en 0 $\}$, $C_0(\mathbb{R}) = \{$ suites convergentes vers 0 $\}$, $S = \{$ suites stationnaires $\}$ et $C = \{$ suites convergentes $\}$. Montrer que S_0 est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ et S est dense dans C.

Exercice 5 Montrer que les sous groupes de $(\mathbb{R},+)$ sont soit denses dans $\mathbb{R}$ soit de la forme $\alpha.\mathbb{Z}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Q}$. Montrer que $\{ \cos(n\alpha)$; $\alpha \in \mathbb{N} \}$ est dense dans $[0,1]$.

Exercice 6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}, p \leqslant n$.

1. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}); rg(M) \leqslant p\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 7 (E,N) est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et $p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$. Montrer que l'ensemble des familles libres de E à p éléments est un ouvert.

Exercice 8 $\mathbb{C}[X]$ est muni de la norme dédinie par

$$\left\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\right\| = \sup_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|.$$

1. Etudier la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{2^n} X^n$.
2. On note P_n le polynôme somme partielle d'ordre n de la série $\sum \dfrac{1}{2^n} X^n$.
3. En considérant la suite (P_n) Montrer que la boule unité n'est pas compacte.

Exercice 9 $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $T : E \to E$ définie par $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t).$$

Etudier la continuité de T pour les normes N_1 et N_∞. et la continuité de φ pour la norme N_∞.

Exercice 10 étudier la continuité des applications définies de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ dans lui même par: a- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. b- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$
d- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. e- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (\alpha_n.u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(\alpha_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$.

Exercice 11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense de $[0,1]$ avec $u_i \neq u_j$ si $i \neq j$.

1. Justifier l'existence d'une telle suite.
2. Montrer qu'en posant ,pour $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\varphi(f) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n} f(u_n)$ on définit une forme linéaire continue sur $C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_\infty$.

Exercice 12 A est un fermé et B un compact d'un evn E .

1. Montrer : $A \cap B \neq \varnothing \Longleftrightarrow d(A,B) = 0$.
2. E est un evn de dimension finie et F un sev de E de dimension finie. Montrer que pour tout x de E il existe y de F unique tel que $d(x,F) = d(x,y)$.

Exercice 13 Montrer que $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ n'est pas connexe par arcs et que $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ est connexe par arcs. Puis en déduire qu'il n'existe pas d'homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$.