Dans toute la suite désigne un $\mathbb{K}$-ev avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 1 $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0 \right\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 2 On suppose E de dimension finie , $f \in \mathcal{L}(E)$ et

$$\mathcal{F} = \{ g \in \mathcal{L}(E) \mid fog = gof = 0 \}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ et calculer sa dimension en fonction de $\mathrm{rang}(f)$.

Exercice 3 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et G un sous espace de E. On pose $\mathcal{A} = \{ u \in \mathcal{L}(E,F) \mid G \subset \ker u \}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous espace de $\mathcal{L}(E,F)$. Déterminer sa dimension.

Exercice 4 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & B \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1. Calculer le rang de M en fonction de celui de A et B.
2. Inverser M lorsque c'est possible.

Exercice 5 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{bmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{bmatrix}$$

et calculer son inverse lorsque c'est possible.

Exercice 6 Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$, on suppose $CD = DC$.

1. Montrer que si D est inversible alors $\det(M) = \det(AD - BC)$.
2. Montrer qu'en général $\det(M) = \det(AD - BC)$ (on pourra utiliser la fonction $\alpha \longmapsto \det(D - \alpha I_n)$)

Exercice 7 $a_0, ..., a_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$.

1. Si A est la matrice diagonale $A = \mathrm{diag}(a_0, ..., a_n)$, montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ qui commutent avec A est égal à $\mathbb{K}[A]$. En déduire le théorème d'interpolation de Lagrange.
2. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(a_0), ..., P(a_n)) \end{aligned}$$
est un isomorphisme. En déduire le théorème d'interpolation de Lagrange.

Exercice 8 $a_0, ..., a_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$

1. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note φ_k la forme linéaire sur $\mathbb{K}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = P(a_k)$. Montrer que $(\varphi_0, ..., \varphi_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]^*$ et donner sa base antéduale.
2. Montrer de deux façons qu'il éxiste $b_0, ..., b_n \in \mathbb{K}$, uniques, tels que :
$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X] \quad \int_0^1 Q(x)P(x)dx = \sum_{k=0}^{n} b_k P(a_k).$$

Exercice 9 Pour $k \in [\![0, n]\!]$, notons φ_k la forme linéaire sur $\mathbb{K}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = P^{(k)}(0)$. Montrer que $(\varphi_0, ..., \varphi_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]^*$ et donner sa base antéduale.

Exercice 10 Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires définies sur $\mathbb{R}^3$ par:

$$\varphi_1(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3, \quad \varphi_2(x) = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3, \quad \varphi_3(x) = x_1 + x_2.$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$ et donner sa base antéduale.

Exercice 11 On suppose E de dimension finie ,β_1 et β_2 deux bases de E et P la matrice de passage de β_1 et β_2. Quelle est la matrice de passage de β_1^* à β_2^* ?

Exercice 12 On note $(E^*)^*$ par E^{**}. On définit $\varphi : E^* \longrightarrow E^{**}$ par $\varphi(x) = \tilde{x}$ avec $\tilde{x}$ définie par $\tilde{x}(f) = f(x)$.

1. Montrer que si E est de dimension finie alors φ est un isomorphisme.
2. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E; on définit la famille $(e_i^*)_{i \in I}$ de E^* par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$. Montrer que $(e_i^*)_{i \in I}$ est toujours libre et qu'elle est génératrice si et seulement si E est de dimension finie.