

Exercice 1 Etudier dans chacun des deux cas suivants l'endomorphisme de \mathbf{E}_3 , donné par sa matrice A dans la base canonique:

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Soit \mathbf{E} l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et $u \in \mathcal{O}^-(\mathbf{E})$. On pose $\mathbf{F} = \ker(u + Id_{\mathbf{E}})$.

- (a) Montrer que $u^2 \in \mathcal{O}^+(\mathbf{E})$, et en déduire que $\mathbf{F} \neq \{0\}$.
(b) Montrer que \mathbf{F} et \mathbf{F}^\perp sont stables par u .
(c) Pour quelle raison $\dim(\mathbf{F}) \neq 2$?
- On suppose $\mathbf{F} \neq \mathbf{E}$.
(a) Montrer que la restriction de u à \mathbf{F}^\perp est une rotation.
(b) En déduire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et une base ε orthonormée de \mathbf{E} tels que:

$$Mat(u, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ qu'on note } T_\theta.$$

- Dans la suite, on suppose que u a pour matrice dans la base canonique de \mathbf{E} , la matrice:

$$A = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

- Justifier le fait que $u \in \mathcal{O}^-(\mathbf{E})$.
- Déterminer $\mathbf{F} = \ker(u + Id_{\mathbf{E}})$, ainsi qu'une base orthonormée de \mathbf{F}^\perp .
- En déduire, alors, une base ε orthonormée de \mathbf{E} dans laquelle la matrice de u est de la forme T_θ (θ un réel à déterminer).
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $v = u \circ u$.

Exercice 3 Tracer la courbe d'équation:

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

en la coupant par les droites $y = tx, t \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 Grâce aux coordonnées polaires, tracer la courbe définie implicitement par:

$$2xy(x^2 + y^2) = x^2 - y^2.$$

Exercice 5 Déterminer et tracer les courbes dont la tangente en tout point M fait un angle $\frac{\pi}{4}$ avec \overrightarrow{OM} .

Exercice 6 Calculer la longueur de la courbe $y = \sqrt{x}(1 - \frac{x}{3})$ pour $0 \leq x \leq 3$.

Exercice 7 Calculer le rayon de courbure de $\rho(\theta) = \cos(\frac{\theta}{3})$ en fonction de ρ .

Exercice 8 Soit \mathcal{P} la parabole ($y^2 = x$). Déterminer une équation paramétrée et une équation cartésienne de Γ la *développé* (lieu des centres de courbure) de \mathcal{P} . Tracer Γ .

Exercice 9 Soit Γ la courbe $\rho(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$.

- Tracer cette courbe.
- Calculer le rayon de courbure.
- Soient I le centre de courbure en M et H le projeté orthogonal de I sur (OM) . Déterminer \overrightarrow{MH} .
- En déduire une construction géométrique de la *développé* de Γ .

Exercice 10 Calculer les intégrales doubles $\iint_D f(x, y) dx dy$ dans les exemples suivants:

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, $f(x, y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$.
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$, $f(x, y) = \frac{1}{(1+x+y)^2}$.
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x, y) = x + y$
- Montrer que $\forall x \in [0, 1] : \ln(1+x) = \int_0^1 \frac{xdy}{1+xy}$.

En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$