Exercice 1 Dans $\mathbb{R}^4$ Euclidien canonique, on considère le plan H d'équation cartésienne relativement à la base canonique:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ecrire, dans la base canonique, la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à H.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$ de $(1, 0, 0)$, et plus généralement d'un vecteur (x, y, z) quelconque.
Donner la matrice de cette projection ainsi que celle de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Exercice 3 Soient x, y et z trois réels tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$. Montrer que $(x + 2y + 3z)^2 \leqslant 14$.

Exercice 4 Soient $(E, \langle|\rangle)$ un espace euclidien et $\|\ \|$ la norme associée; $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'inégalité:

$$\|\sum_{i=1}^{n} v_i\|^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2,$$

pour tout $v_1, \ldots, v_n \in E$.

Exercice 5 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant muni de sa structure euclidienne canonique. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 0, 2)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 6 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour tout $(p, q) \in E^2$, on pose

$$\langle p \mid q \rangle = p(1)q(1) + p(0)q(0) + p(-1)q(-1).$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Trouver une base orthogonale de E, (P_0, P_1, P_2) telle que $\deg(P_i) = i$, pour $i = 0, 1$ et 2.

Exercice 7 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour tout $(p, q) \in E^2$, on pose

$$\langle p \mid q \rangle = \int_0^{+\infty} p(x)q(x)e^{-x}\mathrm{d}x.$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Calculer : $\lambda = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \left(x^3 + ax + b\right)^2 e^{-x}\mathrm{d}x$.

Exercice 8 Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère le produit scalaire:

$$(A \mid B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$$

et N la norme associée.

1. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques pour ce produit scalaire.
2. Montrer que N est sous multiplicative et en déduire que :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |tr(A)| \leqslant \sqrt{n}N(A).$$
3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit
$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \quad X \longmapsto A^tXA \end{array} \right.$$
déterminer l'adjoint de φ.

Exercice 9 Soit E un espace euclidien et $f : E \longrightarrow E$ tel que $f(0) = 0$ et :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 10 Soit $(E, \langle|\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que

$$\forall x, y \in E : \langle x \mid y \rangle = 0 \Longrightarrow \langle f(x) \mid f(y) \rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que,

$$\forall x \in E : \|f(x)\| = k\|x\|.$$

Exercice 11 $(E, (\ \mid\ ))$ est un espace préhilbertien et $(e_1, .., e_n)$ une famille libre de E telle que :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x \mid e_i)|^2.$$

Montrer que $\forall i \in \{1, ..., n\}, ||e_i|| \leqslant 1$ puis que $vect(e_1, ..., e_n)^{\perp} = \{0\}$ et en déduire que $(e_1, .., e_n)$ est une base orthonormée.