

**Exercice 1** Déterminer les rayons de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  si

$$a_n = n \quad a_n = \ln(n) \quad a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad a_n = \frac{n^2 + 1}{n!}.$$

**Exercice 2**  $(u_n)$  est la suite définie par  $u_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$ .

1. Etudier la convergence des séries  $\sum u_n$  et  $\sum (-1)^n u_n$ .
2. En déduire le rayon de convergence de la série entière  $\sum u_n x^n$ .
3. Calculer la somme de  $\sum (-1)^n u_n$ .

**Exercice 3** Développer en série entière la fonction

$$f : x \mapsto x^2 \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

- En utilisant le développement de la fonction exp.
- En utilisant une équation différentielle.

**Exercice 4** Soit  $|a| < 1$ .

1. Montrer que

$$f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$$

définit une fonction sur  $\mathbb{R}$ , qu'elle est  $\mathcal{C}^1$ , puis (utiliser Taylor avec reste intégral) qu'elle est somme de sa série de Taylor en 0, et donc DSE.

2. Procéder par sommation d'une série double pour retrouver le même résultat.

**Exercice 5** Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1, 1[$  par

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}.$$

1. Développer  $f$  en série entière de deux façons différentes.
2. En déduire le nombre de solutions entières de l'équation  $x + 2y = n$ .

3. Avec les pièces de monnaie, de combien de façons on peut payer 10 DH ?

**Exercice 6** Montrer que les fonctions :

$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$$

sont prolongeables en des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 7** Même question avec la fonction  $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$  est prolongeables en une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[-1, 1[$ .

**Exercice 8** Soit  $(a_n)$  une suite récurrente définie par:

$$\begin{cases} a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ donnés, et} \\ \forall n \geq 3, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe  $A \geq 0$  et  $k > 0$  tels que:  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq Ak^n$ .
2. Montrer que la série entière  $\sum a_n x^n$  a un rayon de convergence non nulle. Calculer sa somme et les  $a_n$  pour  $n \geq 3$ .

**Exercice 9** Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  les suites récurrentes définies par

$$(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = -a_n + b_n \end{cases}$$

On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n.$$

1. Montrer que les séries entières définissant  $f$  et  $g$  ont des rayons de convergence non nuls.
2. Calculer  $f'$  et  $g'$  en fonction de  $f$  et  $g$ .
3. En déduire les valeurs des  $a_n$  et  $b_n$  et calculer

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

**Exercice 10** Trouver les solutions de l'équation différentielle :

$$x(x^2 + 1)y'' - 2(x^2 + 1)y' - 2xy = 0.$$

qui sont développables en série entière.