

Exercice 1 Calculer les intégrales

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ipx}}{z - e^{ix}} dx, \text{ pour } p \in \mathbb{N} \text{ et } z \in \mathbb{C} \text{ et } |z| > 1,$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x^2 - 2x \cos(\alpha) + 1)}{x} dx \quad \alpha \text{ un paramètre réel.}$$

Exercice 2 Calculer les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{\ln(x) \ln(1-x)}{x} dx .$$

Exercice 3 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme pair,

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^{2k}.$$

Montrer que

$$\int_0^1 p(x) dx = -\frac{i}{2} \int_0^\pi p(e^{i\theta}) \cdot e^{i\theta} d\theta,$$

puis que

$$\int_0^1 p^2(x) dx \leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n (a_k)^2 .$$

Exercice 4 Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^n (\sin \pi t) dt = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Exercice 5 On considère la fonction $f : u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ sur $[0, 1[$.

1. Ecrire le DSE de f sur $[0, 1[$.

2. Justifier que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du.$$

3. Utiliser le fait que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et montrer soigneusement que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

En déduire alors que $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du = \frac{\pi^2}{12}$.

4. Montrer à l'aide d'un changement de variable puis un passage à la limite que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 \ln(1+t^n) dt = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du.$$

5. On note $J_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$. Montrer que

$$J_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 6 On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} dt.$$

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$.

2. Montrer l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ln(u_n) = \alpha \ln(n) + \beta + o(1).$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.

Exercice 7 $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Domaine de définition, continuité et dérivabilité de f ?

2. Montrer qu'au voisinage de $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

3. Montrer que l'application $x \mapsto f(1) - f(x) - \ln(x)$ admet une limite finie en 0.

4. Donner un équivalent de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n+t} dt$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.