© B. Seddoug & R. Kaichouh

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}$,on définit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}.$$

Etudier la convergence de (f_n) et $\sum f_n$.

Exercice 2 Etudier les convergences simple, uniforme et normale de $\sum f_n$ avec $f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

Exercice 3 Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = 1 + x^2 \sin \frac{1}{nx} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f_n(0) = 1.$$

1. Montrerque la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.
2. Y'a t'il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-x^2 n^2}$.

1. Quel est son domaine de définition?
2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} x f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 5 Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1 - x^{2n+1}}$.

1. Etudier le domaine de définition de f,.
2. Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 1.

Exercice 6 Soit la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-n.x}}{n+1}$

1. Quel est le domaine de définition et de continuité de f.
2. En considérant g définie par $g(x) = e^{-x} f(x)$, donner une expression simple de $f(x)$.

Exercice 7 Donner un équivalent de $g : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ en 0.

Exercice 8 Soit la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(0)$.
3. Trouver un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.
4. Tracer la courbe de f.

Exercice 9 Soit la suite de fonctions $f_n : x \longmapsto (x + x^n)^n$ définies sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t) \mathrm{d}t$.

1. Etudier les convergences simple et uniforme de (f_n).
2. Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2^{n+1}}{n^2}$.

Exercice 10 On considère la suite (f_n) de fonctions numériques définie sur $[0, 2]$ par :

$$\forall x \in [0, 2] : f_n(x) = n^2 x (1-x)^n .$$

1. Etudier les variations de f_n sur $[0, 2]$.
2. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(t) \mathrm{d}t$.
3. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0, 1]$.
4. Montrer que pour $a \in]0, 1[$, la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, 2-a]$.

Exercice 11 Soient $m \in \mathbb{N}$ et $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynômiale réelles telle que pour tout n, $P_n \in \mathbb{R}_m[x]$. On suppose que $(P_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.
Montrer que f est un polynôme de $\mathbb{R}_m[x]$ et que cette convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$. (Penser aux polynômes de Lagrange).