Exercice 1 On considère les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par :

$$q_1(P) = P(0).P(1).P(2); q_2(P) = P(0).P(1), q_3(P) = |P(0).P(1)|$$

Déterminer parmi ces applications lesquelles sont des formes quadratiques et dans ce cas, préciser leur forme polaire.

Exercice 2 Soit $E = \mathcal{C}([-1,1];\mathbb{R})$. Pour chacune des applications ci-dessous montrer qu'il s'agit d'une forme quadratique sur E, déterminer sa forme polaire et son noyau:

$$q_1 : f \mapsto \int_{-1}^{1} f^2(t)dt, q_2 : f \mapsto \int_{0}^{1} f^2(t)dt, q_3 : f \mapsto \int_{-1}^{1} g(t).f^2(t).dt$$

Exercice 3 Montrer que l'expression $\Phi(P) = 2P(1).P'(1)$ définit sur $\mathbb{R}_2[X]$ une forme quadratique; quelle est sa forme polaire ?
Donner la matrice de Φ dans la base $(1, X, X^2)$. Donner le noyau de Φ.

Exercice 4 On considère sur $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'application Φ définie par

$$\Phi(M) = \det(M).$$

1. Montrer que Φ est une forme quadratique et déterminer sa matrice dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau, le rang et la signature de Φ.
3. $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr}(A) = 0\}$. Montrer que F est un sev de E et déterminer son orthogonal.

Exercice 5 Répondre aux mêmes questions que l'exercice précédent pour $q(M) = \operatorname{Tr}(M^2)$. Puis montrer que les ensemble des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux pour q.

Exercice 6 Réduire par la méthode de Gauss la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par:

$$q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 5z^2 - 2yz - 2xz + 6xy$$

Donner la signature, le rang et une base q-orthogonale.

Exercice 7 Soit $q : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$q(P) = P^2(0) + P^2(1) + P^2(2) + P^2(3).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}_3[X]$ et donner sa forme polaire .
2. Donner la signature de q.
3. Donner une base de $\mathbb{R}_3[X]$ dans laquelle q s´écrit sous sa forme de Sylvester (penser aux polynômes d'interpolation).
4. Déterminer une base de l'orthogonal pour q de l'ensemble
$$\{X(X-1); X(X-1)(X-2)\}.$$

Exercice 8 Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et les matrices $A, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par:

$$D = \operatorname{diag}(1, 3, ..., 2n-1) \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $B = D - A$ et q la forme quadratique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$q(X) = {}^tXBX.$$

1. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$
$$q(X) = n.x_n^2 + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} k(x_k - x_{k+1})^2.$$
2. En déduire le rang et la signature de q.
3. **Application:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\sum u_n^2$ converge,on note:
$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} u_k \text{ et } S_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} U_k^2$$
   (a) Exprimer u_k en fonction de U_k et U_{k-1}.
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 1$,
   $$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} U_k^2 \leqslant 2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} u_k U_k \text{ et } \forall n \geqslant 1, S_n \leqslant 2\sqrt{\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} u_k^2}\sqrt{S_n}$$
   indication: utiliser le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.
   (c) En déduire que $\sum U_n^2$ converge.