© B. Seddoug & R. Kaichouh

Exercice 1 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par: $f(x,y) = (x+y, xy)$. Déterminer un ouvert de U de $\mathbb{R}^2$ tel que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Exercice 2 **S**oient $a, b \in \mathbb{R}$ et : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longrightarrow (x + a\sin(y), y + b\sin(x))$. Trouver une condition nécéssaire et suffisante sur a et $b$pour que f soit un $\mathcal{C}^1 - diff\acute{e}omorphisme$.

Exercice 3 Soit (E) l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x}$$

En utilisant un changement de variables polaires ,$x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$, et la fonction $F : (\rho,\theta) \longmapsto f(x,y)$ Montrer que (E) devient:

$$\rho\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \tan(\theta).$$

Résoudre (E).

Exercice 4 (Math1 MP CNC2009) Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$; on définit la fonction g sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $g(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

1. (a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles premières en fonction de φ'.
   (b) Calculer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ en fonction de φ' et φ''.
2. Déterminer sur $\mathbb{R}$ les solutions de l'équation différentielle
$$(1+t^2)x'' + 2tx' = t. \tag{1}$$
3. On veut déterminer les fonctions φ pour lesquelles g vérifie l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{y}{x^3} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}. \tag{2}$$
   (a) Montrer que si g vérifie (2) alors φ vérifie (1).
   (b) En déduire l'expression de φ puis celle de g.
   (c) Vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus sont effectivement des solutions de (2)

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.Le Laplacien de f est

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

On suppose : $\Delta f = 0$. Montrer que $M(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$ est constant.

Exercice 6 Etudier les extrema locaux des fonctions suivantes:

1. $f(x,y) = x^3 + y^3$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $f(x,y) = x^2 + y^2 + \sin(x^2+y^2)$ sur $[-1,1]^2$.
3. $f(x,y) = e^{x\cos y}$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 10y + 2xy + 6$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 Soit $a > 0$ et $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \frac{a}{x} + \frac{a}{y} + \frac{xy}{a^2}$. Montrer que f présente un minimum globale à déterminer.

Exercice 8 (Math1 TSI CNC2009) Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1.$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Etudier les dérivées partielles de f en $(0,0)$.
4. Montrer que $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \sqrt{x^2+y^2} < 2\}$ est un oouvert de $\mathbb{R}^2$.
5. Chercher les points critiques de f sur U.
6. Justifier que f est bornée sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 4\}$ et qu'elle y atteint ses bornes, puis trouver les extrema de f sur D.

Exercice 9 Soit $a > 0$. Trouver les extrema de $x\ln(x) + y\ln(y) + z\ln(z)$ sur $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 3a\}$