

Exercice 1 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. On définit, pour $a \in \mathbb{R}$

$$E_a = \{P \in E \mid (X - a) \text{ divise } P\}.$$

Montrer que si $a \neq b$ il existe un couple de réels (c, d) tels que $1 = c(X - a) + d(X - b)$. En déduire que $E = E_a + E_b$, la somme est-elle directe?

Exercice 2 Soit $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E .

Exercice 3 Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites numériques convergentes. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergent vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires de E .

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel de dimension n et φ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est une base de E .

Exercice 5 Soient E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

1. $\ker(f) = \text{Im}(f)$.
2. $f^2 = 0$ et $n = 2\text{rang}(f)$.

Exercice 6 Soient p et q deux projecteurs de E , espace vectoriel, tels que $pq = qp$ (p et q commutent). Montrer que pq et $(p + q - pq)$ sont deux projecteurs de E , et que :

$$\begin{aligned} \text{Im}(pq) &= \text{Im } p \cap \text{Im } q, \\ \text{Im}(p + q - pq) &= \text{Im } p + \text{Im } q. \end{aligned}$$

Exercice 7 Soient p et q deux projecteurs de E , espace vectoriel; donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p + q$ soit un projecteur de E ; donner alors $\text{Im}(p + q)$ et $\ker(p + q)$.

Indication : on montrera que $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$ et que $\ker(p + q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

Exercice 8 Soit E l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , P le sous-espace des fonctions paires et I le sous-espace des fonctions impaires. Montrer que $E = P \oplus I$. Donner l'expression du projecteur sur P de direction I .

Exercice 9 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes, et $f : E \rightarrow E$ définie par :

$$\forall P \in E, f(P)(X) = \frac{P(-X) - P(X)}{2}.$$

Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$, que $E = \text{Im } f \oplus \ker(f)$ mais que $f^2 = -f$.

Exercice 10 Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $U : E \rightarrow E$ définie par $f \mapsto U(f)$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, U(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

et $U(f)(0) = f(0)$. Montrer que $U \in \mathcal{L}(E)$, déterminer $\ker(U)$ et $\text{Im}(U)$.

Exercice 11 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^3 = -f$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que $\ker(f) \cap \ker(f^2 + I) = \{0\}$, $\ker(f) \neq \{0\}$ et $\ker(f^2 + I) \neq \{0\}$.
2. Soit x un élément distinct de 0 de $\ker(f^2 + I)$. Montrer qu'il n'existe pas $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha x$. En déduire que $\{x, f(x)\}$ est libre.
3. Calculer $\dim(\ker(f))$ et $\dim(\ker(f^2 + I))$.

4. Déterminer une base ε de \mathbb{R}^3 telle que : $\text{Mat}(f, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 Soient E un espace vectoriel de dimension n , f une application linéaire de E dans lui-même et x un élément de E tel que la famille $f(x), \dots, f^n(x)$ soit libre.

1. Montrer que la famille $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$ est une base de E . Déduiser-en que f est bijective.
2. On suppose maintenant que $f^n(x) = x$. Déterminer la matrice de f dans la base $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$.

Exercice 13 Déterminer la matrice de la projection de \mathbb{R}^2 sur $\mathbb{R}\vec{i}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$ dans la base $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j})$ puis (\vec{i}, \vec{j}) .