

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

La partie IV utilise le résultat de la partie III. Les autres parties sont indépendantes.

I- Extrema et formes quadratiques

On considère les deux fonctions f_1 et f_2 définies sur \mathbb{R}^2 par:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 + 1 \text{ et } f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 + 1$$

puis la fonction F définie sur \mathbb{R}^2 par:

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left((f_1(x_1, x_2))^2 + (f_2(x_1, x_2))^2 \right).$$

1 . Justifier que F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 et calculer ses dérivées partielles premières.

2 . Montrer que le système d'équations qui permet de déterminer les points critiques de F peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1 = 0 \\ (x_1 - x_2)(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3) = 0 \end{cases}$$

3 . On considère dans cette question la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + \frac{1}{6}.$$

(a) Dire pourquoi f n'est pas une forme quadratique.

(b) On pose $X_1 = x_1 - \frac{1}{6}$ et $X_2 = x_2 - \frac{1}{6}$, puis $q(X_1, X_2) = f(x_1, x_2)$.

(i) Montrer que q est alors une forme quadratique en (X_1, X_2) .

(ii) Réduire la forme quadratique q par la méthode de Gauss.

(iii) Etablir, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité:

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3 > 0$$

4 . En déduire que l'unique point critique de F est $(-1/2, -1/2)$.

5 . Déterminer en tout point $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ la hessienne de F

$$\nabla^2 F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

et en déduire que F présente un minimum local en $(-1/2, -1/2)$.

II- Equation aux dérivées partielles

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. On définit le laplacien Δf , pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par:

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z).$$

6 . Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et on suppose qu'il existe une fonction u de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} telle que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = u(r).$$

(a) Calculer pour $r \neq 0$, les dérivées partielles premières et secondes de r .

(b) Calculer pour $r \neq 0$, les dérivées partielles premières de f en fonction $u'(r)$ et r .

(c) Montrer que pour $r \neq 0$,

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \Delta f(x, y, z) = u''(r) + \frac{2}{r}u'(r)$$

On considère l'équation $\Delta f = -\omega^2 f$, où $\omega > 0$, ou bien

$$u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) = -\omega^2 u(r) \quad (1)$$

qu'on se propose de résoudre dans la suite.

7 . On définit la fonction v par $v(r) = ru(r)$. Montrer que u est solution de (1) si et seulement si v est solution de l'équation différentielle

$$v'' + \omega^2 v = 0 \quad (2)$$

8 . Résoudre l'équation différentielle (2) et en déduire pour $r \neq 0$ les solutions de (1).

III- Calcul de la somme d'une série convergente

9 . Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.

10 . Etablir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout t de $]0, \pi[$:

$$\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} = \frac{\sin \frac{tm}{2}}{\sin \frac{t}{2}} e^{\frac{i(m+1)t}{2}}, \quad \text{puis} \quad \sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

11 . Soit $u : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 . Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

12 . Soit l'application $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{t^2 - t}{2 \sin \frac{t}{2}}$ si $t \in]0, \pi[$ et $f(0) = -1$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$

13 . Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt$.

Puis que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

IV- Etude d'une somme de série de fonctions

14 . Montrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ converge.

On note S sa somme, pour tout x de $[0, +\infty[$,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* : S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$

15 . Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

16 . Etudier la suite $(S(n) - S_n(n))_n$ et conclure que la série S ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

17 . Dans cette question, on veut démontrer que S est continue.

(a) Montrer que pour tout $A > 0$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ converge uniformément sur $[0, A]$.

(b) En déduire que S est continue sur $[0, +\infty[$.

18 . Dans cette question, on veut démontrer que S est dérivable.

(a) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

(b) En déduire que S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

19 . Montrer que S est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est concave.

20 . Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

(a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge et calculer sa valeur.

(b) Montrer: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \varphi(n)$, et en déduire:

$$\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

(c) Conclure que $S(x)$ équivaut à $\ln x$ en $+\infty$.

21 . Dresser le tableau de variation de S , en précisant la limite de S en $+\infty$. Puis tracer l'allure de la courbe représentative de S .