

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

Exercice 1

On considère dans \mathbb{R}^2 les ensembles suivants:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 - 2y \leq 1\}$$

$$\tilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 - 2y < 1\}$$

QUESTION 1 Justifier pourquoi D est fermé et \tilde{D} ouvert. Que représente \tilde{D} par rapport à D ?

QUESTION 2 Dessiner sommairement l'ensemble D et montrer que D est borné. (ind: remarquer que $2x^2 + y^2 - 2y - 1 = 2x^2 + (y - 1)^2 - 2$)

On considère la fonction F définie sur \mathbb{R}^2 par $F(x, y) = x^2 e^y$.

QUESTION 3 Montrer que F admet un minimum global et un maximum global sur D .

QUESTION 4 Chercher les extrema locaux de F sur \tilde{D} puis donner le minimum global de F sur D .

QUESTION 5 On pose $\Gamma = D \setminus \tilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 - 2y = 1\}$ et g définie sur \mathbb{R}^2 par

$$g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2y - 1.$$

(a) Justifier pourquoi le maximum de F sur D est atteint en un point $(a, b) \in \Gamma$ vérifiant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \end{vmatrix} = 0$$

(b) Calculer, alors, le maximum de F sur D .

Exercice 2

Soit Ω l'ouvert de \mathbb{R}^2 , $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

On définit les application r et t sur Ω par

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } t(x, y) = \frac{y}{x}$$

On note E le \mathbb{R} – espace vectoriel des applications de classe C^∞ de Ω dans \mathbb{R} .

QUESTION 6 Montrer que l'application

$$\Phi : \Omega \longrightarrow \Omega; (x, y) \longmapsto (r(x, y), t(x, y))$$

et C^∞ – difféomorphisme. Puis calculer la matrice jacobienne de Φ .

QUESTION 7 Montrer que pour toute fonction $f \in E$, il existe une application unique $\tilde{f} \in E$, telle que

$$\forall (x, y) \in \Omega : f(x, y) = \tilde{f}(r(x, y), t(x, y)).$$

Pour tout $f \in E$, on note Tf l'application de Ω sur \mathbb{R} , définie par

$$Tf(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

QUESTION 8 Vérifier que $T : f \longmapsto Tf$ est une application linéaire de E dans E .

QUESTION 9 Soit $f \in E$. Exprimer Tf à l'aide $r, t, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}$.

QUESTION 10 En déduire le noyau E_0 de T .

QUESTION 11 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que α est une valeur propre de T et déterminer E_α le sous espace propre de T associé à la valeur propre α .

Problème

\mathbb{R}^3 étant muni de sa structure euclidienne canonique. Pour tout $(a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3$, on note $M(a, b, \lambda)$ ou simplement M matrice:

$$M(a, b, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + a & -a & b \\ -a & \lambda + a & b \\ b & b & \lambda \end{pmatrix}.$$

Pour tout vecteurs $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^3 , on pose

$$\phi(U, V) = {}^tUMV,$$

ϕ étant alors la forme bilinéaire symétrique associée à M , on note Q sa forme quadratique.

QUESTION 12 Ecrire l'expression de $Q(U)$ en fonction de x, y et z .

QUESTION 13 On suppose le long de cette question que $\lambda = 0$.

- (a) Etudier selon a et b le rang de la forme quadratique Q .
 (b) On suppose que $a = 0$ et $b \neq 0$. Alors

$$Q(U) = 2b(x + y)z.$$

- (i) Donner le rang de Q puis une base de son noyau.
 (ii) Utiliser la méthode de Gauss pour calculer la signature de Q .

- (c) On suppose que $a \neq 0$ et $b = 0$. Alors

$$Q(U) = a(x - y)^2.$$

Donner le rang de Q et sa signature, puis une base de son noyau.

- (d) On suppose que $ab \neq 0$. Alors

$$Q(U) = a(x - y)^2 + 2b(x + y)z.$$

- (i) Utiliser le calcul de la (**QUESTION 13.b.ii**) pour réduire $Q(U)$ en somme de carrés.

- (ii) Donner alors, en justifiant, la signature de Q .

QUESTION 14 On suppose le long de cette question que $\lambda = 3, a = -1$ et $b = -1$. Alors

$$Q(U) = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz.$$

- (a) Réduire en carrés, par la méthode de Gauss, la forme quadratique $Q(U)$.
 (b) En déduire alors le rang et la signature de Q .
 (c) Déterminer une base Q - orthogonale.

QUESTION 15 On suppose le long de cette question que $\lambda = 2, a = -1$ et $b = 1$. Alors

$$Q(U) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

- (a) Réduire en carrés, par la méthode de Gauss, la forme quadratique $Q(U)$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $u(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ y \end{pmatrix}$, puis

$$f(x, y) = Q(u(x, y)).$$

- (b) Calculer explicitement $f(x, y)$, puis justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .
 (c) Vérifier que f admet exactement deux points critiques, que l'on précisera.
 (ind: on pourra remarquer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(y + 1)(x + xy + y)$)
 (d) Utiliser la (**QUESTION 15.a.**) pour montrer que l'un de ces points critiques (à préciser) correspond à un minimum global de f .
 (e) Vérifier que

$$f(-2 + t, -1 + t) - f(-2, -1) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -2t^3.$$

Qu'en déduit-on pour l'autre point critique.