Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

Les matrices diagonales et les matrices triangulaires sont des exemples triviaux de matrices ayant leurs valeurs propres sur la diagonale. Ce problème s'intéresse aux matrices vérifiant cette particularité.
Dans ce problème, toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier, $n \geqslant 2$. On dira qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice à diagonale propre** si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec le même ordre de multiplicité, c'est-à-dire si le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - X)$$

On pourra noter en abrégé : A est une **MDP** pour A est une matrice à diagonale propre. On notera $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

I. Exemples

1 . (Cas $n = 2$) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Ecrire $\chi_A(X)$ en fonction de $\operatorname{Tr} A$ et $\det A$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit une **MDP**.

(c) Déterminer alors $\mathcal{E}_2$ puis montrer que $\mathcal{E}_2$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2 . On considère la matrice **antisymétrique**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^3, puis en déduire que A n'est pas une **MDP**.

3 . Soit α un réel et

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2-\alpha \\ 0 & 2 & 2+\alpha \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer, en donnant le détail des calculs, le polynôme caractéristique de la matrice $M(\alpha)$.

(b) En déduire que, pour tout α, la matrice $M(\alpha)$ est une **MDP**.

(c) Pour quelles valeurs de α, $M(\alpha)$ est diagonalisable?

II. Test dans le cas $n = 3$

4 . Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, une **MDP**. Montrer que

$$A \text{ est inversible si et seulement si } a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0.$$

5 . Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, démontrer que A est une **MDP** si et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \quad \text{et} \quad a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0.$$

6 . Parmi les matrices suivantes, indiquer les **MDP** :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

III. Exemples de matrices par blocs

7 . Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par blocs (les matrices A et C étant des matrices carrées),

(a) Montrer que

$$M = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$$

en donnant des précisions sur r et s.

(b) Montrer soigneusement que

$$\det \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det C \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = \det A.$$

puis que $\det M = \det A \times \det C$.

(c) En déduire que si A et C sont des **MDP** alors M est une **MDP**.

8 . Donner un exemple d'une **MDP**, M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ (matrice 4×4) dans chacun des cas suivants :

(a) La matrice M contient treize réels non nuls (on expliquera brièvement la démarche).

(b) $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où les matrices A, B et C sont toutes des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucun terme nul (on expliquera brièvement la démarche).

IV. Quelques propriétés

9 . Justifier qu'une **MDP** est trigonalisable (i.e. semblable à une matrice triangulaire supérieure).

10 . Donner une matrice trigonalisable (ou diagonalisable) de taille 2×2 qui n'est pas à diagonale propre?

11 . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à une **MDP** si et seulement si χ_A est scindé.

12 . Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, démontrer que, pour tout couple (a, b) de réels, les matrices $aA + bI_n$ et les matrices $a^tA + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre.

13 . Si on note G_n l'ensemble des matrices à diagonale propre inversibles, démontrer que G_n est dense dans $\mathcal{E}_n$.

14 . Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre. $\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

V. Matrices symétriques et matrices antisymétriques

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une **MDP**.

15 . Montrer que $\mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii})^2$. (utiliser la question **9**).

16 . Calculer $\mathrm{Tr}({}^tAA)$ puis montrer que

$$\mathrm{Tr}({}^tAA) = 0 \Longleftrightarrow A = 0.$$

17 . On suppose que A est symétrique, i.e. ${}^tA = A$.

(a) Utiliser les questions **15** et **16**, pour montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii})^2 .$$

(b) Déterminer alors la forme de la matrice A.

18 . On suppose que A est antisymétrique, i.e. ${}^tA = -A$.

(a) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} = 0$.

(b) Démontrer que $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$.

(c) Conclure que A est la matrice nulle.

VI. Dimension maximale d'un s.e.v inclus dans $\mathcal{E}_n$

On notera $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques.

19 . Indiquer la dimension de $\mathcal{A}_n$ (on ne demande aucune démonstration, la réponse suffit).

20 . Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$. Démontrer que

$$\dim F \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$$

pour cela on pourra utiliser $\dim(F + \mathcal{A}_n)$. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$?

21 . Déterminer un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$, de dimension maximale, mais tel que F ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulaires.