

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

Sur les classes de similitude de matrices 2×2

Notations et rappels

Dans ce problème \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} et $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans \mathbb{K} ; la matrice identité se notera I_2 . $GL_2(\mathbb{K})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à \mathbb{K} .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on appelle matrice conjuguée de A et on note \overline{A} , la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A ; la matrice transposée de la matrice \overline{A} se notera A^* :

$$A^* = \overline{A}^t.$$

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ s'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; la classe d'équivalence d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ notée $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, est donnée par

$$\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{ PAP^{-1} \mid P \in GL_2(\mathbb{K}) \}$$

est dite la classe de similitude de A .

I. Résultats préliminaires

- 1 . (a) Vérifier que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$.
- (b) Montrer que si A et B sont semblables alors $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(B)$.
- (c) Donner la classe de similitude d'une matrice scalaire, c'est à dire une matrice de la forme xI_2 avec $x \in \mathbb{K}$.

$$2 . \text{ Pour tout } \lambda \in \mathbb{K}, \text{ on pose } E_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } F_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Justifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, E_λ et F_λ sont inversibles et exprimer leur inverses.

- (b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; calculer les produits $E_\lambda A E_\lambda^{-1}$ et $F_\lambda A F_\lambda^{-1}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

- (c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on suppose que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$. Montrer que A est une matrice scalaire.

- 3 . Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on pose

$$\|A\|_S = \left(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 \right)^{1/2}.$$

- (a) Montrer que $A \mapsto \|A\|_S$ est une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
- (b) Vérifier que, pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $\|A\|_S = \sqrt{\text{tr}(AA^*)}$ et que si $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est une matrice vérifiant $UU^* = I_2$ alors

$$\|A\|_S = \|UAU^*\|_S = \|U^*AU\|_S.$$

Dans toute la suite, on munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de cette norme.

- 4 . Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on suppose que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est bornée.

- (a) Justifier que les parties $\{E_\lambda A E_\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ et $\{F_\lambda A F_\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont bornées.
- (b) En déduire que A est une matrice scalaire.

- 5 . Montrer que les applications $A \mapsto \text{tr}(A)$ et $A \mapsto \det(A)$ sont continues sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

- 6 . Montrer que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, elles ont le même déterminant, la même trace et le même polynôme caractéristique.

II. Classe de similitude fermée

- 7 . Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

- (a) Si $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$ avec $\lambda \neq \mu$, justifier que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

(b) Si $\mathcal{S}_{p_{\mathbb{K}}}(A) = \{\lambda\}$, montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ si et seulement si $A = \lambda I_2$.

(c) Si $\mathcal{S}_{p_{\mathbb{K}}}(A) = \{\lambda\}$ et $A \neq \lambda I_2$, montrer que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

8 . Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

(a) Si A est une matrice scalaire, justifier que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

(b) Si $\mathcal{S}_{p_{\mathbb{K}}}(A) = \{\lambda\}$ et A non diagonalisable, on pose

$$A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Étudier la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et en déduire que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermée.

(c) Si $\mathcal{S}_{p_{\mathbb{K}}}(A) = \{\lambda, \mu\}$ avec $\lambda \neq \mu$, soit $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

(i) En étudiant les suite $(P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ pour $\alpha = \lambda$ et $\alpha = \mu$, montrer que $\det(B - \lambda I_2) = \det(B - \mu I_2) = 0$.

(ii) En déduire que $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ et conclure que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.

9 . Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ alors $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

10 . Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{S}_{p_{\mathbb{R}}}(A) = \emptyset$. On pose

$$\Delta = (\operatorname{tr}(A))^2 - 4 \det(A).$$

(a) Justifier que $\Delta < 0$. Dans la suite, on pose $\delta = \sqrt{-\Delta}$ et

$$A' = \frac{2}{\delta} \left(A - \frac{\operatorname{tr}(A)}{2} I_2 \right) \quad A'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \operatorname{tr}(A) & -\delta \\ \delta & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}$$

(b) Montrer que $(A')^2 = -I_2$. On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à A' .

(c) Soit $e \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Montrer que $(e, f(e))$ est une base de \mathbb{R}^2 et écrire la matrice A_1 de f dans cette base.

(d) Exprimer A' en fonction de A_1 et en déduire que A et A'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(e) Soit $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ qui converge vers une matrice $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(C) = \operatorname{tr}(A)$ et $\det(C) = \det(A)$ puis justifier que $C \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$.

11 . Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou bien $\mathcal{S}_{p_{\mathbb{R}}}(A) = \emptyset$.

Exercice

Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension $n \geq 3$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme minimal est $\pi_u = (X - 1)^2(X - 2)$.

12 . L'endomorphisme u est-il diagonalisable? justifier votre réponse.

13 . Donner une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire (non diagonale) dont le polynôme minimal est égal à π_u .

14 . Montrer que $E = \ker(u - Id_E)^2 \oplus \ker(u - 2Id_E)$.

On pose $p = (u - Id_E)^2$ et $q = u \circ (2Id_E - u)$

15 . Calculer l'endomorphisme $p + q$.

16 . Démontrer que p est la projection sur $\ker(u - 2Id_E)$ et parallèlement à $\ker(u - Id_E)^2$. Identifier alors l'endomorphisme q .

17 . Déterminer un nombre réel α tel que pour tout entier nature k , $u^k \circ p = \alpha^k p$. Ind: remarquer que $(u - 2Id_E) \circ p = 0$.

18 . En déduire que $\exp(u) \circ p = \beta p$ où β est un réel à déterminer.

On rappelle que exponentielle de u est l'endomorphisme $\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} u^k$.