Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

Racines carrées de matrices(source: CCP MP 2005 - Math 2)

Notations.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$), on dit qu'une matrice R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $R^2 = A$.
On note $\mathcal{R}ac(A)$ l'ensemble des racines carrées de A, c'est à dire

$$\mathcal{R}ac(A) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid R^2 = A\}$$

Les trois parties du problème sont **indépendantes.**
Les trois premiers exemples de la partie I sont tous **indépendants**.

I. Détermination de $\mathcal{R}ac(A)$ dans quelques exemples

Exemple 1 : Calcul

1 . Dans cette question $n = 2$. Donner deux racines distinctes de chacune des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 . Dans cette question $n = 2$ et $A = I_2$. Avec un calcul élémentaire déterminer toutes les matrices $R = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ vérifiant $R^2 = I_2$. Remarquer alors que dans ce cas $\mathcal{R}ac(A)$ est un ensemble infini.

3 . Dans cette question $n = 3$. Montrer que la matrice $A = -I_3$ n'admet pas de racines dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, (ind: utiliser le déterminant).

Exemple 2 : cas où $A = I_n$, $n \geq 2$

4 . Soit R une racine carrée de I_n et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à R.

(a) Vérifier que $f^2 - Id_{\mathbb{R}^n} = 0$, puis justifier que

$$\mathbb{R}^n = \ker\left(f - Id_{\mathbb{R}^n}\right) \oplus \ker\left(f + Id_{\mathbb{R}^n}\right).$$

(b) Montrer que R est semblable à une matrice diagonale que l'on décrira à l'aide de $p = \dim\ker\left(f - Id_{\mathbb{R}^n}\right)$ et de $q = \dim\ker\left(f + Id_{\mathbb{R}^n}\right)$.

5 . Déterminer $\mathcal{R}ac(I_n)$. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Exemple 3 : cas où A possède n valeurs propres distinctes

On suppose que A admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.

6 . Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, puis montrer que
R est une racine carrée de A, si et seulement si, la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.

7 . Soit S une racine carrée de D, i.e: $S^2 = D$.

(a) Montrer que $DS = SD$.

(b) Poser $S = (s_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ puis montrer que $s_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et que donc la matrice S est diagonale.

(c) On note alors $S = diag(s_1, \ldots, s_n)$. Que vaut s_i^2 lorsque $i \in [\![1, n]\!]$?

(d) Que peut-on dire de $\mathcal{R}ac(A)$ si A admet une valeur propre strictement négative ?

8 . Si on suppose toutes les valeurs propres de A positives ou nulles,

(a) Déterminer les racines carrées de la matrice D. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

(b) Ecrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. Combien de racines carrées A admet-elle ?

9 . Application : Ecrire toutes les racines carrées de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

II. Etude topologique de $\mathcal{R}ac(A)$.

Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit une norme en posant $N(A) = \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de cette norme N. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, le choix de cette norme n'influence pas les propriétés topologiques qui seront prouvées.

10 . Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Expliquer pourquoi l'application $M \longmapsto M^2$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $\mathcal{R}ac(A)$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

11 . Etude du caractère borné de $Rac(I_n)$.

(a) Pour tout entier naturel q, on pose $S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix}$. Calculer S_q^2.
$\mathcal{R}ac(I_2)$ est-elle une partie bornée de $M_2(\mathbb{R})$?

(b) $\mathcal{R}ac(I_n)$ est-elle une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$? (ind: considérer les matrices M_q définies par blocs: $M_q = \begin{pmatrix} S_q & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$)

(c) **Application :** pour cette question, $n \geq 2$.
Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|.\|$ "surmultiplicative" sur $GL_n(\mathbb{R})$, c'est à dire vérifiant pour tous A et B dans $GL_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \geq \|A\|.\|B\|$.

III. Intérieur de $\mathcal{R}ac(A)$

Si p est un entier naturel non nul, on notera $\|.\|_\infty$ la norme infinie sur $\mathbb{R}^p$:

$$\text{si } x = (x_1, \dots, x_p), \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq p} |x_i|.$$

On note Γ_p l'ensemble des **fonctions polynomiales** sur $\mathbb{R}^p$.
C'est à dire : si $P \in \Gamma_p$, il existe N entier naturel et une famille de réels $\{a_{i_1,\dots,i_p},\ 0 \leq i_1, \dots, i_p \leq N\}$ tels que

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p,\ P(x_1, \dots, x_p) = \sum_{0\leq i_1,\dots,i_p\leq N} a_{i_1,\dots,i_p} x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p}$$

Par exemple si $p = 3$, $P(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_1x_2x_3 + 4x_2^5$ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^3$. Si $p = 1$, Γ_1 est l'ensemble des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$. Enfin, si $p \in \Gamma_p$, on pose $Z(P) = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid P(x_1, \dots, x_p) = 0\}$ ($Z(P)$ est **l'ensemble des zéros de la fonction polynomiale** P).

12 . Questions préliminaires :

(a) Soit $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$. Montrer que la boule ouverte $B(a, r)$ peut s'écrire comme produit de p intervalles.

(b) Soient F et G deux parties de $\mathbb{R}^p$. On suppose que F est d'intérieur vide, montrer que $F \cap G$ est encore d'intérieur vide.

13 . Exemples d'ensembles de zéros de fonctions polynomiales.

(a) Dans cette question, $p = 1$. Soit P une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$. Dans quel cas $Z(P)$ est-il infini ? Justifier votre réponse.

(b) Dans cette question, $p = 2$. On considère $P(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 - 1$ et $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$. Représenter graphiquement dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles $Z(P)$ et $Z(Q)$. $Z(P)$ et $Z(Q)$ sont-il infinis ?

14 . Intérieur de l'ensemble des zéros d'une fonction polynomiale.
Soit $P \in \Gamma_p$.

(a) Soient $I_1, \dots, I_p$ des parties infinies de $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur p, que si la fonction polynomiale P s'annule sur $I_1 \times \cdots \times I_p$, alors P est la fonction nulle.

(b) En déduire que si P s'annule sur une partie d'intérieur non vide, P est la fonction nulle.

(c) Si l'on suppose que P n'est pas la fonction nulle, que vaut l'intérieur de $Z(P)$?

15 . Application à l'étude de l'intérieur de $Rac(A)$.
Dans cette question, on confondra les espaces vectoriels $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$.
Par exemple, on prendra la liberté d'écrire que pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}$, sans se soucier de l'ordre des termes.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Ecrire $\mathcal{R}ac(A)$ sous forme d'un ensemble de $\mathbb{R}^{n^2}$ puis montrer qu'il existe des éléments $P_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, de Γ_{n^2} tels que $\mathcal{R}ac(A) = \bigcap\limits_{1\leq i,j\leq n} Z(P_{i,j})$.

(b) Déterminer l'intérieur de $\mathcal{R}ac(A)$.