

## Problème 1

Dans tout ce problème,  $a$  désigne un réel. On se propose d'étudier les suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où  $P$  est un polynôme.

Un élément de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est noté indifféremment  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $u$ .

### Partie I

Dans cette partie, on pose :

$$E_a^{(0)} = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = au_n + b \right\}$$

On notera  $b = b_u$  pour  $u \in E_a^{(0)}$ .

**QUESTION 1** (a)  $E_1^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + b\}$ .  $E_1^{(0)}$  est donc l'ensemble des suites arithmétiques.

Donc  $u \in E_1^{(0)} \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda n + \mu$ .

(b)  $E_0^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = b\}$ .  $E_0^{(0)}$  est donc l'ensemble des suites constantes à partir du second terme.

Donc  $u \in E_0^{(0)} \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tel que  $u_0 = \lambda$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \mu$ .

Dans le reste de cette partie,  $a$  est supposé différent de 1.

**QUESTION 2** D'abord la suite nulle  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$  est dans  $E_a^{(0)}$  avec  $b = 0$ . Soit  $u$  et  $v$  dans  $E_a^{(0)}$  et soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels.

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\lambda u + \mu v)_{n+1} = \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \lambda(au_n + b_u) + \mu(av_n + b_v) = a(\lambda u + \mu v)_n + (\lambda b_u + \mu b_v).$$

Donc  $\lambda u + \mu v \in E_a^{(0)}$  avec  $b_{\lambda u + \mu v} = \lambda b_u + \mu b_v$ .  $E_a^{(0)}$  étant stable par combinaisons linéaires est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

**QUESTION 3** On précisera les valeurs de  $b_x$  et  $b_y$ .  $x \in E_a^{(0)}$  avec  $b_x = 1 - a$  car  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = 1 = ax_n + b_x = a.1 + (1 - a)$ .

- $y \in E_a^{(0)}$  avec  $b_y = 0$  car  $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = a^{n+1} = ay_n + b_y = a.a^n + 0$ .

- $(x, y)$  est une famille libre. En effet :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha x + \beta y = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}, \alpha + \beta a^n = 0$ . Cette égalité étant vraie pour tout  $n$  est vraie en particulier pour  $n = 0$  et  $n = 1$ . Ceci conduit

au système  $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta a = 0 \end{cases}$  avec  $a \neq 1$ , d'où  $\alpha = \beta = 0$ .

**QUESTION 4** Soit  $u \in E_a^{(0)}$ .

(a)

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda + \mu a = u_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda(1 - a) = -au_0 + u_1 \\ \mu(1 - a) = u_0 - u_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda(1 - a) = -au_0 + (au_0 + b_u) \\ \mu(1 - a) = u_0 - (au_0 + b_u) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda(1 - a) = b_u \\ \mu(1 - a) = u_0(1 - a) - b_u \end{cases} \end{aligned}$$

avec  $a \neq 1$

Donc le système  $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$  admet pour unique solution le couple  $(\lambda, \mu) = \left( \frac{b_u}{1 - a}, u_0 - \frac{b_u}{1 - a} \right)$ .

(b) Raisonnons par récurrence : la propriété annoncée est vraie pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

Supposons qu'au rang  $n$ ,  $u_n = \lambda x_n + \mu y_n$ . Alors

$$\begin{aligned} \lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1} &= \lambda(ax_n + b_x) + \mu ay_n = a(\lambda x_n + \mu y_n) + \lambda(1 - a) \\ &= a(\lambda x_n + \mu y_n) + b_u = au_n + b_u = u_{n+1}. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour tout  $n$ .

(c) Donc,  $\forall u \in E_a^{(0)}, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, u = \lambda x + \mu y$ .

La famille  $(x, y)$  est donc une famille génératrice de  $E_a^{(0)}$ .

**QUESTION 5** Déterminer  $E_a^{(0)}$ . On donnera en particulier la dimension de  $E_a^{(0)}$ . Or on a vu au (3) que cette famille est libre. On en conclut que la famille  $(x, y)$  est une base de  $E_a^{(0)}$ , et que  $E_a^{(0)}$  est un espace vectoriel de dimension 2.

## Partie II

Dans cette partie, on suppose que  $a \neq 1$ . On fixe un entier naturel  $p$ . On pose :

$$E_a^{(p)} = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists P \in \mathbb{R}_p[X], \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = au_n + P(n) \right\}$$

On notera  $P = P_u$  pour  $u \in E_a^{(p)}$ .

**QUESTION 6**  $E_a^{(p)}$  étant non vide car contient  $E_a^{(0)}$ .  $\forall (u, v) \in (E_a^{(p)})^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} (\lambda u + \mu v)_{n+1} &= \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \lambda(au_n + P_u(n)) + \mu(av_n + P_v(n)) \\ &= a(\lambda u_n + \mu v_n) + (\lambda P_u(n) + \mu P_v(n)) \\ &= a(\lambda u + \mu v)_n + (\lambda P_u + \mu P_v)(n). \end{aligned}$$

$\lambda P_u + \mu P_v \in \mathbb{R}_p[X]$ , donc  $\lambda u + \mu v \in E_a^{(p)}$  avec  $P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v$ .

$E_a^{(p)}$  est donc un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

**QUESTION 7** On vient de voir que  $P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v$  ce qui s'écrit :  $\theta(\lambda u + \mu v) = \lambda \theta(u) + \mu \theta(v)$

$\theta$  est donc une application linéaire de  $E_a^{(p)}$  dans  $\mathbb{R}_p[X]$ .

**QUESTION 8**  $u \in \ker(\theta) \iff \theta(u) = 0 \iff P_u = 0$ .

Donc  $u \in \ker(\theta) \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n$ .

$\ker(\theta)$  est donc l'ensemble des suites géométriques de raison  $a$ .

Remarquons que la suite  $(y_n = a^n)$  est non nulle, appartient à  $\ker(\theta)$  et est génératrice de  $\ker(\theta)$  car toute suite géométrique  $u$  de raison  $a$  est telle que :  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda a^n$ . Donc  $\ker(\theta)$  est le sous-espace vectoriel de  $E_a^{(p)}$  engendré par  $(y)$ , d'où  $\dim(\ker(\theta)) = 1$ .

**QUESTION 9** Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $Q_k = (X + 1)^k - aX^k$ .

(a) Le coefficient de  $X^k$  dans  $Q_k$  est égal à  $1 - a$  avec  $a \neq 1$ . Il est donc non nul, d'où  $\deg(Q_k) = k$ .

(b) Les polynômes  $Q_0, Q_1, \dots, Q_p$  sont des polynômes non nuls de degrés distincts 2 à 2. Ils forment donc une famille libre de  $\mathbb{R}_p[X]$ .

Or  $\dim(\mathbb{R}_p[X]) = p + 1$  et la famille libre  $(Q_0, Q_1, \dots, Q_p)$  de  $\mathbb{R}_p[X]$  a  $p + 1$  éléments. On en conclut que  $(Q_0, Q_1, \dots, Q_p)$  est une base de  $\mathbb{R}_p[X]$ .

**QUESTION 10** (a) Soit  $u$  la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^k$ .

Alors,  $\forall n \in \mathbb{N}, au_n + Q_k(n) = a.n^k + (n + 1)^k - a.n^k = (n + 1)^k = u_{n+1}$ .

Donc  $u \in E_a^{(p)}$  et  $\theta(u) = Q_k$ , d'où  $Q_k \in \text{Im}(\theta)$ .

(b) L'application linéaire  $\theta$  est donc surjective, i.e.  $\text{Im}(\theta) = \mathbb{R}_p[X]$ , et donc  $\dim(\text{Im}(\theta)) = p + 1$ .

**QUESTION 11** on a que  $\ker(\theta)$  est de dimension 1, et que  $\text{Im}(\theta)$  est de dimension  $p + 1$ .

L'image et la noyau de  $\theta$  étant de dimension finie, on déduit que  $E_a^{(p)}$  est de dimension finie, et par application du théorème du rang :

$$\dim(E_a^{(p)}) = \dim(\ker(\theta)) + \dim(\text{Im}(\theta)) = p + 2.$$

**QUESTION 12** Pour  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ , on pose  $x^{(k)}$  la suite définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $x_n^{(k)} = n^k$ . On rappelle que  $y$  est la suite définie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , par  $y_n = a^n$ . Montrons que  $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$  est une base de  $E_a^{(p)}$ . La famille  $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$  a  $p + 2$  éléments dans  $E_a^{(p)}$  espace vectoriel de dimension  $p + 2$ . Pour montrer que c'est une base, il suffit donc de montrer que c'est une famille de  $E_a^{(p)}$  et qu'elle est libre.

- On a montré au (a.) que pour tout  $k, x^{(k)}$  est élément de  $E_a^{(p)}$ .
- Cette famille est libre. en effet : soient  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p, \alpha$  dans  $\mathbb{R}$  tels que

$$\alpha y + \sum_{k=0}^p \lambda_k x^{(k)} = 0$$

en introduisant le morphisme  $\theta \in \mathcal{L}(E_a^{(p)}, \mathbb{R}_p[X])$ , et puisque  $y \in \ker \theta$ , on a  $\sum_{k=0}^p \lambda_k \theta(x^{(k)}) = 0$ . Or d'après (a.),  $\theta(x^{(i)}) = Q_k$ , donc  $\sum_{k=0}^p \lambda_k Q_k = 0$ , et comme la famille  $(Q_0, \dots, Q_p)$  est libre alors pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \lambda_k = 0$ , par conséquent  $\alpha = 0$  et la famille  $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$  est une base  $E_a^{(p)}$ .

**QUESTION 13 (Application)** Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant :

$$u_0 = -2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7$$

$u \in E_2^{(1)}$  avec  $P_u = -2X + 7$ .

Donc  $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \alpha + \beta n + \gamma 2^n$ . Il nous faut donc trouver les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$ .

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_1 = 3 \\ u_2 = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \gamma = -2 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 3 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 11 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \gamma = -2 \\ \beta + \gamma = 5 \\ 2\beta + 3\gamma = 13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 3 \end{cases}$$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = -5 + 2n + 3 \cdot 2^n$ .

## Problème 2

Soit  $n$  en entier,  $n \geq 2$ ; on note  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  son dual. La matrice élémentaire  $E_{i,j}$  est la matrice de  $E$  dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la  $i$ -ième ligne et sur la  $j$ -ième colonne, qui vaut 1. A chaque matrice  $U$  de  $E$ , on associe :

- L'application  $T_U$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$  :  $M \mapsto \text{Tr}(UM)$  (linéaire)
- L'ensemble  $H_U = \{M \in E \mid \text{Tr}(UM) = 0\} = \ker(T_U)$

### Partie I

**QUESTION 14** Dans cette question seulement, on prend  $n = 2$  et on pose :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Les quatre matrices élémentaires  $E_{i,j}$ :

$$\begin{aligned} E_{1,1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{1,2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E_{2,1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & E_{2,2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la famille  $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  est une base de  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , c'est sa base canonique.

(b) On calcule d'abord le produit  $UM$  pour une matrice  $M = (a_{i,j}) \in E$  :

$$UM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} \\ a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} \end{pmatrix}$$

et donc  $\text{Tr}(UM) = a_{11} + a_{21} + a_{12} + a_{22}$ . Donc l'ensemble des matrices de  $E$  dont la somme des quatre coefficients vaut 0.

(c) Avec  $M = I_2$ , on a  $T(U) = 2 \neq 0$ ,  $T_U$  est donc une forme linéaire non nulle, par conséquent  $\dim \text{Im } T_U = 1$ , puis  $\dim H_U = \dim E - 1 = 2^2 - 1 = 3$ .

(d) La matrice  $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  étant inversible et vérifie  $\text{Tr}(UJ_2) = 0$ .  
 $GL_2(\mathbb{R}) \cap H_U \neq \emptyset$ .

### Partie II

**QUESTION 15** Soit  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$ , posons  $AB = (c_{i,j})$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$c_{i,i} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i}$$

donc

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i} b_{i,j}$$

**QUESTION 16** Soit  $U$  dans  $E$ .

(a) Si  $U$  est la matrice nulle, alors  $T_U$  est la forme linéaire nulle donc  $H_U = E$  et  $\dim H_U = \dim E = n^2$ .

(b) Si  $U$  n'est pas la matrice nulle,  $U$  possède au moins un terme non nul. Soit  $(j_0, i_0)$  l'indice de ce terme. Comme le produit de  $U$  à droite par la matrice  $E_{i_0, j_0}$  est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf celle de rang  $j_0$ , qui contient la colonne de rang  $i_0$  de  $U$ , le seul élément diagonal non nul de ce produit est le terme diagonal d'ordre  $j_0$ , qui vaut précisément celui d'indice  $(j_0, i_0)$  de  $U$ . Il en résulte que  $T_U(E_{i_0, j_0}) \neq 0$ .

Par suite,  $T_U$  est une forme linéaire non nulle sur  $E$ , dont le noyau  $H_U$  est de dimension  $n^2 - 1$ .  $(i_0, j_0)$  tel que . En déduire  $\dim H_U$ .

**QUESTION 17** Pour  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $T_{i,j} = T_{E_{i,j}}$ .

(a) Les indices  $k$  et  $l$  étant fixés, le produit des matrices élémentaires

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$$

où  $\delta_{j,k} = 1$  si  $j = k$ , 0 si non (symbole de Kronecker). Donc

$$T_{i,j}(E_{k,l}) = \delta_{j,k}\text{Tr}(E_{i,l}) = \delta_{j,k}\delta_{i,l}$$

ce qui veut dire que

$$\begin{cases} T_{i,j}(E_{j,i}) = 1 \\ T_{i,j}(E_{k,l}) = 0 \quad \text{si } (i,j) \neq (l,k) \end{cases}$$

(b) D'après la question précédente la famille  $(T_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  est la base duale de la base  $(E_{j,i})_{1 \leq i,j \leq n}$  canonique de  $E$ . On en déduit que les  $n^2$  éléments  $T_{i,j}$  de  $E^*$  permettent de définir une base de  $E^*$ .

**QUESTION 18** L'application  $\phi$  de  $E$  vers  $E^* : U \mapsto \phi(U) = T_U$  est linéaire d'après la linéarité de la trace. De plus, elle transforme la base canonique des matrices élémentaires de  $E$  en sa base duale. On en conclut que  $\phi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**QUESTION 19** On considère un hyperplan vectoriel  $H$  de  $E$ .

- (a) Par définition d'un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie, la dimension de  $H$  vaut  $n^2 - 1$ .
- (b) Soit  $A$  une matrice non nulle de  $E$  qui n'appartient pas à  $H$ , d'abord  $H \cap \text{vect}(A) = \{0_E\}$ , puis  $\dim H + \dim \text{vect}(A) = \dim E$ . Donc  $E = H \oplus \text{vect}(A)$ .
- (c) On sait qu'on peut définir une application linéaire par ses restrictions sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Ainsi, la forme linéaire  $l$  dont la restriction à  $H$  est nulle et qui envoie  $A$  sur 1 admet bien  $H$  comme noyau.
- (d) Soit  $U$  l'antécédent de  $l$  par  $\phi$ . On a alors  $H = \ker l = \ker T_U = H_U$ . Donc il existe d'un élément  $U$  de  $E$  tel que  $H = H_U$ .

### Partie III

Pour  $r$  tel que  $1 \leq r \leq n$ , on note :  $R = \sum_{i=1}^r E_{i,i}$ . Soit :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**QUESTION 20** En développant le déterminant par rapport à la première ligne

$$\det P = (-1)^n \left| \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = (-1)^n$$

donc  $P$  est inversible. Puis si on pose  $R = (r_{i,j})$  et  $P = (p_{i,j})$

$$\text{Tr}(RP) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{j,i}p_{i,j} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r r_{i,i}p_{i,i} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r 1 \times 0 = 0$$

donc  $P$  appartient à l'hyperplan  $H_R$ .

**QUESTION 21** Tout hyperplan  $H$  de  $E$  est de la forme  $H_U$  pour une certaine matrice non nulle  $U$ . lorsque  $H = H_U$ , avec  $U$  de rang  $r$ , on rappelle l'existence de matrices  $S_1$  et  $S_2$  inversibles telles que  $S_1US_2 = R$ , et donc avec  $P = S_2US_1$

$$\text{Tr}(RP) = \text{Tr}[(S_1US_2)P] = \text{Tr}[US_2PS_1] = T_U[S_2PS_1]$$

et comme  $\text{Tr}(RP) = 0$ , alors  $S_2PS_1 \in H_U = H$ .

On conclut donc que chaque hyperplan de  $E$  possède au moins une matrice inversible.