Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

PREMIER PROBLEME :

Le but de ce problème est l'étude d'une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles.
On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{K}_2[X]$ des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2. On considère la **forme linéaire** L définie sur E par

$$\forall P \in E : L(P) = \int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x.$$

1 . (a) Pour $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in E$, calculer $L(P)$ en fonction de a_0, a_1 et a_2.

(b) Donner la dimension puis une base de $\ker L$.

2 . On considère des nombres réels x_0, x_1 et x_2 tels que

$$-1 \leq x_0 < x_1 < x_2 \leq 1.$$

et on note P_0, P_1 et P_2 la famille des polynômes de Lagrange définis par:

$$\begin{array}{lll} & P_i(x_i) = 1 & \text{pour } i = 0, 1 \text{ et } 2 \\ \text{et} & P_i(x_j) = 0 & \text{pour } j \neq i,\ 0 \leq i, j \leq 2. \end{array}$$

(a) Donner les expressions des $P_i(x)$ puis montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de E.

(b) Soit $P \in E$, écrire $P(x)$ dans la base (P_0, P_1, P_2).

(c) Montrer qu'il existe un unique triplet $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ telle que

$$\forall\ P \in E : L(P) = \lambda_0 P(x_0) + \lambda_1 P(x_1) + \lambda_2 P(x_2).$$

3 . On suppose que $x_2 = -x_0$ et $x_1 = 0$.

(a) Montrer que $\lambda_2 = \lambda_0$.

(b) En déduire que toute fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 vérifie

$$\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x = \lambda_0 P(x_0) + \lambda_1 P(x_1) + \lambda_2 P(x_2).$$

4 . Soit f une fonction réelle de classe C^3 sur l'intervalle $[-1, 1]$. On pose

$$M = \sup_{x \in [-1,1]} \left| f^{(3)}(x) \right|, \text{ où } f^{(3)} \text{ désigne la dérivée } 3^{éme} \text{ de } f.$$

On rappelle l'inégalité de Taylor Lagrange

$$\forall x \in [-1, 1] : \left| f(x) - \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq M \frac{|x|^3}{3!}$$

Déterminer des réels positifs α et β tels que

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{2} \lambda_i f(x_i) \right| \leq M(\alpha + \beta \sum_{i=0}^{2} |\lambda_i|)$$

où les $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq 2}$ sont les nombres réels déterminés dans la **Question 2**.

5 . On choisit dans cette question

$$x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1.$$

(a) Calculer λ_0, λ_1, λ_2.

(b) En utilisant le résultat de la **Question 4**, donner une majoration de

$$\left| \int_{-1}^{1} e^{(x/4)^2}\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{2} \lambda_i e^{(x_i/4)^2} \right|$$

où les $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq 2}$ sont les nombres réels trouvés en **(a)**.

SECOND PROBLEME :

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est-à-dire qui vérifient la relation : $M.{}^tM = {}^tM\,.\,M$ (1)

Dans la suite de l'énoncé, on se contentera alors de dire dans ce cas que la matrice M vérifie la relation (1).

PARTIE I :

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $M_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire ayant 2 lignes, 2 colonnes et des coefficients réels.

On notera en particulier : $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

1) Montrer que les matrices A et C vérifient la relation (1).

2) Calculer A^2. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, A^n vérifie la relation (1).

3) Montrer que A est inversible.

   Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base canonique $B = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est A.

4) Préciser les valeurs de $u(\overrightarrow{i})$ et $u(\overrightarrow{j})$ en fonction de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

   Montrer que u est une symétrie. Préciser l'ensemble de ses vecteurs invariants.

   Dans toute la suite on notera $U = A + I$.

5) Montrer que la matrice U vérifie la relation (1). Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha_n \in \mathbb{R}\ ,\ U^n = \alpha_n U$.

   En déduire que toutes ses puissances $U^n, n \in \mathbb{N}^*$ vérifient (1).

   On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1).

6) Calculer les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée.

   En déduire que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

7) Etant donnée une matrice $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ quelconque de $M_2(\mathbb{R})$, déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d pour que M appartienne à E_2. On donnera les deux formes possibles des matrices de E_2.

8) En déduire que E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$, dont on précisera pour chacun une base.

9) Etant données M et N deux matrices de E_2, a-t-on nécessairement $M.N \in E_2$? On pourra utiliser certaines matrices introduites précédemment dans l'énoncé.

PARTIE II :

On se place ici dans l'espace $M_3(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $B' = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\overrightarrow{i}) = -\overrightarrow{k}, h(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}, h(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{j}$ ainsi que $S = Mat_{B'}(h)$.

L'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_3.

10) Représenter la matrice S.

11) Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 sont dans E_3.

12) Montrer que pour tous réels a, b et c, la matrice $R = aI_3 + bS + cS^2$ appartient à E_3.

13) En déduire que E_3 contient un espace vectoriel de dimension 3 que l'on notera F.

14) Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

PARTIE III :

On se place à présent dans l'espace $M_4(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $B" = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$.

On définit la matrice B par : $B = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

où a est un réel quelconque, et on appelle u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $Mat_{B"}(u) = B$.

L'ensemble des matrices de $M_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_4.

15) Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$.

    Dans toute la suite on pose $a = -1$.

16) Déterminer une base de $Ker(u)$ et de $Im(u)$.

17) Calculer $u(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4})$. Que remarque-t-on ?

18) Calculer $B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $B \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Commenter le résultat obtenu.

19) On note $C = (\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4},\ \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_4},\ \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4})$ et on admet sans démonstration que C est une base de $\mathbb{R}^4$.

    Déduire des questions précédentes $Mat_C(u)$.

    En déduire l'existence d'une matrice $P \in M_4(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que $B = P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale. On ne demande pas d'expliciter la matrice P^{-1}.

20) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B^n = P\Delta^n P^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et B^{2p+1} pour tout entier naturel p en fonction de B et B^2.