*Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.*

## Problème 1

Dans tout ce problème, $a$ désigne un réel. On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où $P$ est un polynôme.
Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $u$.

### Partie I

Dans cette partie, on pose :

$$E_a^{(0)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = au_n + b\right\}$$

On notera $b = b_u$ pour $u \in E_a^{(0)}$.

**Question 1** (a) Déterminer $E_1^{(0)}$.

(b) Déterminer $E_0^{(0)}$.

Dans le reste de cette partie, $a$ est supposé différent de 1.

**Question 2** Montrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Question 3** Soit $x$ la suite constante égale à 1 (pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $x_n = 1$) et $y$ la suite définie, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ par : $y_n = a^n$. Montrer que $(x, y)$ est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera les valeurs de $b_x$ et $b_y$.

**Question 4** Soit $u \in E_a^{(0)}$.

(a) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que :

$$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$$

(b) Montrer que, pour $\lambda$ et $\mu$ définis à la question précédente, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

(c) Que peut-on conclure ?

**Question 5** Déterminer $E_a^{(0)}$. On donnera en particulier la dimension de $E_a^{(0)}$.

### Partie II

Dans cette partie, on suppose que $a \neq 1$. On fixe un entier naturel $p$. On pose :

$$E_a^{(p)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists P \in \mathbb{R}_p[X], \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = au_n + P(n)\right\}$$

On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.

**Question 6** Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Question 7** Montrer que l'application $\theta$ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u) = P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

**Question 8** Déterminer $\ker\theta$ (noyau de $\theta$).

**Question 9** Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.

(a) Quel est le degré de $Q_k$ ?

(b) Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

**Question 10** (a) Montrer que pour tout $k$ dans $[\![0, p]\!]$, $Q_k$ est dans l'image de $\theta$, notée $\operatorname{Im}\theta$.

(b) Que peut-on en conclure ?

**Question 11** Déduire des questions précédentes la dimension de $E_a^{(p)}$.

**Question 12** Pour $k \in [\![0, p]\!]$, on pose $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n^{(k)} = n^k$. On rappelle que $y$ est la suite définie pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, par $y_n = a^n$. Montrer que $\left(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}, y\right)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

**QUESTION 13 (Application)** Déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_0 = -2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7$$

# Problème 2

Soit $n$ en entier, $n \geq 2$; on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ son dual. La matrice élémentaire $E_{i,j}$ est la matrice de $E$ dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la $i$-ième ligne et sur la $j$-ième colonne, qui vaut 1. A chaque matrice $U$ de $E$, on associe :

- L'application $T_U$ de $E$ vers $\mathbb{R}$ : $M \mapsto Tr\,(UM)$ (linéaire)
- L'ensemble $H_U = \{M \in E\ |Tr(UM) = 0\} = \ker(T_U)$

## Partie I

**QUESTION 14** Dans cette question seulement, on prend $n = 2$ et on pose :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Écrire les quatres matrices élémentaires $E_{i,j}$; que peut-on dire de la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $H_U$ est l'ensemble des matrices de $E$ dont la somme des quatres coefficients vaut 0.

(c) Trouver une matrice $M$ de $E$ telle que $T\,(UM) \neq 0$, et en déduire la dimension de $\operatorname{Im} T_U$ puis la dimension de $H_U$.

(d) Montrer que $H_U$ possède une matrice inversible.

## Partie II

**QUESTION 15** Soit $A = \left(a_{i,j}\right)$ et $B = \left(b_{i,j}\right)$ des éléments de $E$. Montrer que :

$$Tr\,(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} b_{i,j}$$

**QUESTION 16** Soit $U$ dans $E$.

(a) Si $U$ est la matrice nulle, déterminer $\dim H_U$.

(b) Si $U$ n'est pas la matrice nulle, montrer que l'on peut trouver un couple d'entiers $(i_0, j_0)$ tel que $T_U\left(E_{i_0,j_0}\right) \neq 0$. En déduire $\dim H_U$.

**QUESTION 17** Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $T_{i,j} = T_{E_{i,j}}$.

(a) Les indices $k$ et $l$ étant fixés, calculer $T_{i,j}\left(E_{k,l}\right)$.

(b) En déduire que les $n^2$ éléments $T_{i,j}$ de $E^*$ permettent de définir une base de $E^*$.

**QUESTION 18** Montrer que l'application $\phi$ de $E$ vers $E^*$ : $U \mapsto \phi(U) = T_U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**QUESTION 19** On considère un hyperplan vectoriel $H$ de $E$.

(a) Quelle est sa dimension ?

(b) Soit $A$ une matrice non nulle de $E$ qui n'appartient pas à $H$, montrer que : $E = H \oplus \operatorname{vect}(A)$.

(c) Construire alors un élément $l$ de $E^*$ tel que $H = \ker l$.

(d) Prouver l'existence d'un élément $U$ de $E$ tel que $H = H_U$.

## Partie III

Pour $r$ tel que $1 \leq r \leq n$, on note : $R = \sum\limits_{i=1}^{r} E_{i,i}$. Soit :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**QUESTION 20** Montrer que $P$ est inversible et que $P$ appartient à l'hyperplan $H_R$.

**QUESTION 21** En déduire que chaque hyperplan vectoriel $H$ de $E$ possède au moins une matrice inversible. *Indication: lorsque $H = H_U$, avec $U$ de rang $r$, on rappelle l'existence de matrices $S_1$ et $S_2$ inversibles telles que $S_1 \cdot U \cdot S_2 = R$.*