Problème 1

Les parties I et II de ce problème sont indépendantes. La partie III utilise certains résultats établis dans les parties précédentes.

Partie I. Calcul des intégrales de Wallis.

On appelle intégrales de Wallis, les intégrales I_n définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$$

1) Calculer I_0 et I_1.

2) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 2,\ I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Indication : on pourra utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

3)

3a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

3b. Déterminer l'expression de I_{2n+1} en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II. Fonctions de Bessel.

L'objectif de cette partie n'est pas la résolution complète des équations différentielles proposées, mais l'étude de certaines de leurs solutions définies sur différents intervalles.

*On rappelle qu'on appelle **solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur un intervalle** I, toute application y, définie et deux fois dérivable sur I, vérifiant l'équation différentielle pour tout $x \in I$.*

Soit $p \in \mathbb{N}$, on s'intéresse aux équations différentielles

$$(E_p) \quad x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

et

$$(E'_p) \quad x^2z'' + x(2p+1)z' + x^2z = 0$$

1) Soient y et z deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, vérifiant la relation : $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = x^p z(x)$. Montrer que y est solution de (E_p) sur $]0, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, 0[$), si et seulement si z est solution de (E'_p) sur $]0, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, 0[$).

2) Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, on note $z(x)$ sa somme.

2a. Établir les relations que doivent vérifier les coefficients (a_n) de la série entière pour que z soit solution de (E'_p) sur $]-R, R[$.

2b. Vérifier que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0$, et exprimer les coefficients a_{2n} en fonction de n, du paramètre p et de a_0.

2c. Démontrer que le rayon de convergence de la série entière déterminée précédemment vaut $R = +\infty$.

3) Démontrer que pour toute valeur donnée à $a_0 \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} p!\dfrac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+p)!} a_0 x^{2n}$ est solution de (E'_p) sur $\mathbb{R}$.

4) On considère la série entière : $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{2^{2n+p}\, n!(n+p)!} x^{2n+p}$.

4a. À l'aide de **3)**, justifier que le rayon de convergence de cette série vaut $R = +\infty$.
On note désormais J_p la somme de cette série vérifiant donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+p)!} x^{2n}$$

4b. Déduire des questions **1)** et **3)** que J_p est une solution de (E_p) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

4c. Expliquer pourquoi J_p est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4d. Montrer que J_p est une solution de (E_p) sur $\mathbb{R}$, on pourra distinguer le cas $p = 0$.

5) Démontrer la relation suivante : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad J_{p+1}(x) = \dfrac{pJ_p(x)}{x} - J'_p(x)$.

Partie III. Etude d'une intégrale à paramètre.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x,t) = \cos(x \sin t)$. On définit alors

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin t)\mathrm{d}t$$

1) Expliquer pourquoi la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) Rappeler les théorèmes relatifs à la dérivation d'une intégrale à paramètre, et en déduire que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3)

3a. Donner les expressions de $F'(x)$ et $F''(x)$ sous forme intégrale.

3b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = -x[F(x) + F''(x)]$$

4) En utilisant un développement en série entière, montrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n} \sin^{2n} t}{(2n)!} \right) \mathrm{d}t$$

5) On admet qu'il est possible d'intégrer terme à terme cette expression, et que F vérifie alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \frac{x^{2n} \sin^{2n} t}{(2n)!} \mathrm{d}t$$

À l'aide des résultats des parties **I.** et **II.**, démontrer que $F = J_0$.

Problème 2

Partie I. Comparaison entre série et intégrale.

1) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante. Pour tout entier N tel que $N \geqslant n_0$, on pose

$$S_N = \sum_{k=n_0}^{N} f(k) = f(n_0) + \ldots + f(N)$$

1a. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n_0$. Montrer que :

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k)$$

1b. Déduire de la question précédente que : $S_{N+1} - f(n_0) \leqslant \int_{n_0}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant S_N$, puis que

$$\int_{n_0}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant S_N \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{N} f(t)\mathrm{d}t \qquad (*)$$

1c. Soit $X > n_0$. On note N la partie entière de X, c'est-à-dire l'unique entier vérifiant $N \leqslant X < N+1$. Montrer que :

$$\int_{n_0}^{N} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_0}^{X} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_0}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t$$

En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_{n_0}^{N} f(t)\mathrm{d}t\right)_{N \geqslant n_0}$ converge.

1d. Montrer alors que l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ et la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ sont de même nature.

2) Application à la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2a. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$?

2b. On pose $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Montrer que f est décroissante sur $[1, +\infty[$.

2c. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Montrer à l'aide de $(*)$ que : $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

Partie II. Séries de Bertrand.

Dans toute cette partie, α et β sont deux réels, et on pose pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}.$$

1) Supposons $\alpha > 1$.

1a. Soit $\gamma \in]1, \alpha[$. Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$.

1b. En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ converge.

1c. Une application : donner la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$.

2) Supposons $\alpha < 1$.

2a. Donner la limite de nu_n.

2b. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geqslant 2} u_n$.

2c. Une application : donner la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n^2+1)}{\sqrt{n}}$.

3) Supposons $\alpha = 1$.

Notons, pour tout $t > 1$, $f_\beta(t) = \dfrac{1}{t \ln^\beta(t)}$.

3a. Étudier les variations de f_β sur $]1, +\infty[$. Montrer alors qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que f_β soit décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

3b. Soit $X > n_0$. Calculer, en distinguant le cas $\beta = 1$, $I_\beta(X) = \int_{n_0}^{X} f_\beta(t)\mathrm{d}t$.
Donner alors la nature de $I_\beta = \int_{n_0}^{+\infty} f_\beta(t)\mathrm{d}t$ en fonction de β.

3c. En déduire, à l'aide de **I.**, la nature de $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ en fonction de β.

4) À l'aide des résultats de cette partie **II.**, donner une condition nécessaire et suffisante sur (α, β) pour que la série $\sum u_n$ converge.

Partie III. Règle de la loupe.

Dans cette partie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = 2^n u_{2^n} = \underbrace{u_{2^n} + \ldots + u_{2^n}}_{2^n \text{ termes}}$$

Enfin, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on introduit les sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n \qquad \text{et} \qquad T_N = \sum_{n=0}^{N} v_n$$

On fera attention aux indices de départs de sommation dans S_N et T_N.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il d'entiers i vérifiant : $2^n \leqslant i \leqslant 2^{n+1} - 1$?

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \geqslant \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k$$

3) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$T_N \geqslant S_{2^{(N+1)}-1}$$

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2} v_{n+1} \leqslant \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k$$

On pourra commencer par écrire $\frac{1}{2} v_{n+1} = 2^n u_{2^{n+1}}$.

5) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2} T_N \leqslant \frac{1}{2} u_1 + S_{2^N - 1}$$

6) À l'aide de **3)** et **5)**, montrer alors que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

7) Une première application : pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2^{(1-\alpha)n}$.

7b. Donner alors une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

7c. À l'aide de **6)**, quel théorème important du cours a-t-on prouvé ?
On pourra traiter séparément les cas $\alpha \leqslant 0$ et $\alpha > 0$.

8) Une deuxième application : pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

8a. Calculer v_n pour tout entier $n \geqslant 2$.

8b. Donner alors une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge.

8c. Qu'a-t-on redémontré ?

FIN DU SUJET