Exercice 1 Soient u et v deux fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $f(x,t) = \frac{1}{2}\left(u(x+t)+u(x-t)+\int_{x-t}^{x+t} v(s)ds\right)$

a. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0)$ en fonction de u et v.

b. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)$.

c. On cherche les fonctions $y(x,t)$ solution du problème:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0 \text{ sur } [0,\pi]\times\mathbb{R}, \\ y(0,t) = y(\pi,t) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ y(x,0) = \sin(x) \text{ pour tout } x \in [0,\pi]\,, \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \sin(2x) \text{ pour tout } x \in [0,\pi]\,. \end{array}\right. \qquad (P)$$

Choisir convenablement les fonctions u et v et donner une solution y de (P).

Exercice 2 Soit $x_1, ..., x_n$ des réels. On pose

$$V(x_1,...,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

et f la fonction réelle d'une variable réelle définie par

$$f(t) = \begin{vmatrix} e^{tx_1} & x_1e^{tx_1} & \dots & x_1^{n-1}e^{tx_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{tx_n} & x_ne^{tx_n} & \dots & x_n^{n-1}e^{tx_n} \end{vmatrix}.$$

a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(t)$ sous forme intégrale pour tout t.

b. Simplifier f et en déduire $V(x_1,...,x_n)$.

Exercice 3 Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (u,v) \longmapsto h(u,v)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$; montrer que $\dfrac{\partial h}{\partial v}(u,v) = 0$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement s'il existe une fonction h_1 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2, h(u,v) = h_1(u)$.

a. Soit $\Phi : (u,v) \longmapsto (ue^v, e^{-v})$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

(i) Montrer que Φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\Omega = \mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

(ii) Pour tout $(x,y) \in \Omega$, exprimer $\Phi^{-1}(x,y)$ et justifier que Φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

b. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \longmapsto f(x,y)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, telle que

$$\forall (x,y) \in \Omega : x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

On pose $f^* = f \circ \Phi$.

(i) Justifier que la fonction f^* est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f^*}{\partial u}(u,v)$ et $\dfrac{\partial f^*}{\partial v}(u,v)$ de f^*.

(ii) En déduire la forme de la fonction f^* puis donner celle de f.

c. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \longmapsto f(x,y)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, telle que

$$\forall (x,y) \in \Omega : x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = ax+by,$$

où a et b sont des réels.

(i) Trouver une fonction g, linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant:

$$\forall (x,y) \in \Omega : x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = ax+by.$$

(ii) En déduire qu'il existe une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que:

$$\forall (x,y) \in \Omega : f(x,y) = F(xy) + ax - by.$$