

## UTILISATIONS DES MATRICES COMPAGNON

Dans tout le problème  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $n$  est un entier naturel. Pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\chi_A = \det(A - XI_n)$  son polynôme caractéristique et  $\text{sp}(A)$  l'ensemble de ses valeurs propres. Si  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  est un polynôme unitaire de  $\mathbb{K}_n[X]$  on lui associe la **matrice compagnon**:

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

(c'est-à-dire la matrice  $C_P = (c_{i,j})$  est définie par  $c_{i,j} = 1$  pour  $i - j = 1$ ,  $c_{i,n} = -a_{i-1}$  et  $c_{i,j} = 0$  dans les autres cas).

Les parties II, III, et IV, utilisent les résultats de la partie I, et sont indépendantes entre elles.

### I. Propriétés générales

Dans cette partie on considère  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  et  $C_P$  sa matrice compagnon.

1. Montrer que  $C_P$  est inversible si et seulement si  $P(0) \neq 0$ .
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice  $C_P$  et déterminer une constante  $k$  telle que  $\chi_{C_P} = kP$ .
3. Soit  $Q$  un polynôme de  $\mathbb{K}_n[X]$ , déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $\chi_A = Q$ .
4. On note  ${}^tC_P$  la transposée de la matrice  $C_P$ .
  - a. Justifier la proposition :  $\text{sp}(C_P) = \text{sp}({}^tC_P)$ .
  - b. Soit  $\lambda \in \text{sp}({}^tC_P)$ , déterminer le sous-espace propre de  ${}^tC_P$  associé à  $\lambda$ .
  - c. Montrer que  ${}^tC_P$  est diagonalisable si et seulement si  $P$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et a toutes ses racines simples.

- d. On suppose que  $P$  admet  $n$  racines  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  deux à deux distinctes, montrer que  ${}^tC_P$  est diagonalisable et en déduire que le déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

est non nul.

5. *Exemples* : Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant :  $f^{n-1} \neq 0$  et  $f^n = 0$  ; montrer que l'on peut trouver une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est une matrice compagnon que l'on déterminera.

### II. Localisation des racines d'un polynôme

Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose pour tout entier  $1 \leq i \leq n$  :

$$r_i = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \text{ et } D_i = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r_i\}.$$

Pour  $X = {}^t(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ , on note  $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

6. Soit  $\lambda \in \text{sp}(A)$  et  $X = {}^t(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . Montrer que pour tout entier  $1 \leq i \leq n$  :  $|\lambda x_i| \leq r_i \|X\|_\infty$ .
7. Démontrer que  $\text{sp}(A) \subset \bigcup_{k=1}^n D_k$ .
8. Soit  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ , établir que toutes les racines de  $P$  sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon  $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\}$ .

### III. Suites récurrentes linéaires

On note  $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  l'espace vectoriel des suites de complexes. On considère le polynôme  $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0$  de  $\mathbb{C}[X]$  avec  $a_0 \neq 0$  et on lui associe le sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  formé des éléments  $u$  vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+p} = -a_{p-1}u_{n+p-1} - \dots - a_0u_n.$$

9. Montrer que si  $\lambda$  est racine de  $P$  alors la suite  $n \mapsto \lambda^n$  est élément de  $F$ .

10. Soit  $\varphi$  l'application de  $F$  vers  $\mathbb{C}^p$  définie par :  $u \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ , montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de  $F$  ?

11. Pour tout entier  $0 \leq i \leq p-1$  on définit les éléments  $e_i = (\alpha_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$  de  $F$  par :

$$\alpha_{i,i} = 1 \text{ et, lorsque } 0 \leq j \leq p-1 \text{ et } j \neq i, \alpha_{i,j} = 0.$$

a. Déterminer pour  $0 \leq i \leq p-1$ ,  $\alpha_{i,p}$ .

b. Montrer que le système de vecteurs  $(e_0, e_1, \dots, e_{p-1})$  est une base de  $F$ .

c. Soit  $u$  un élément de  $F$ , établir que  $u = \sum_{i=0}^{p-1} u_i e_i$ .

12. Si  $u$  est un élément de  $E$ , on définit l'élément  $f(u)$  de  $E$  par :  $f(u) = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $v_n = u_{n+1}$ . Montrer que l'application  $f$  ainsi définie est un endomorphisme de  $E$  et que  $F$  est stable par  $f$ .

13. Si  $g$  est l'endomorphisme de  $F$  induit par  $f$ , montrer que la matrice de  $g$  dans la base  $(e_0, e_1, \dots, e_{p-1})$  est  ${}^t C_P$ .

14. On suppose que  $P$  admet  $p$  racines non nulles et deux à deux distinctes :  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ .

a. Déterminer une base de  $F$  formée de vecteurs propres de  $g$ .

b. En déduire que, si  $u$  est élément de  $F$ , il existe des constantes complexes  $k_0, k_1, \dots, k_{p-1}$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = k_0 \lambda_0^n + k_1 \lambda_1^n + \dots + k_{p-1} \lambda_{p-1}^n.$$

15. *Exemple* : Soit  $a, b$  et  $c$  trois réels distincts. Déterminer une base de l'espace vectoriel des suites définies par  $u_0, u_1$  et  $u_2$  et par la relation de récurrence valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+3} = (a+b+c)u_{n+2} - (ab+ac+bc)u_{n+1} + abc.$$

### IV. Matrices vérifiant : $\text{rang}(U - V) = 1$

Dans cette partie, pour une matrice  $A$ , on notera  $C_A$  la matrice compagnon du polynôme  $(-1)^n \chi_A$ .

16. Une matrice  $A$  est-elle nécessairement semblable à la matrice compagnon  $C_A$  ?

Pour tout couple  $(U, V)$  de matrices de  $GL_n(\mathbb{K})$ , on considère les deux propositions suivantes, que l'on identifie chacune par un symbole :

(\*) :  $\text{rang}(U - V) = 1$

(\*\*) : Il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $U = P^{-1}C_U P$  et  $V = P^{-1}C_V P$ .

17. Montrer qu'un couple  $(U, V)$  de matrices distinctes de  $GL_n(\mathbb{K})$  vérifiant (\*\*) vérifie (\*).

18. Déterminer un couple  $(U, V)$  de matrices de  $GL_2(\mathbb{K})$  ( $n = 2$ ) vérifiant (\*) mais ne vérifiant pas (\*\*) et déterminer le plus grand commun diviseur des polynômes  $\chi_U$  et  $\chi_V$ .