

PROBLÈME : THÉORÈME DU POINT FIXE ET APPLICATIONS.**Partie I : Le théorème du point fixe de Picard.****1) Démonstration du théorème.**

- (a) Comme f est k -contractante, il vient par définition même que $\|u_{n+1}\| \leq k\|u_n\|$ d'où par itération immédiate $\|u_n\| \leq k^n\|u_0\| = k^n\|f(a) - a\|$.
Ainsi la série $\sum u_n$ converge absolument par principe de comparaison des séries à termes positifs (ici à la série géométrique). Comme l'espace est complet, cela entraîne la convergence de la série elle-même. \square
- (b) Notons $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ qui existe bien vu la question précédente. Il vient par télescopage $S_n = x_{n+1} - a$.
Or $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$ donc $x_n = S_{n-1} + a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S + a$. Ainsi la suite (x_n) est-elle bien convergente. \square
- (c) Comme f est continue sur E (car lipschitzienne) donc en particulier en ℓ , il vient que $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$ par caractérisation séquentielle de la continuité. Or $f(x_n) = x_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. \square
- (d) Supposons qu'il existe un autre point fixe ℓ' . Alors $\|\ell - \ell'\| = \|f(\ell) - f(\ell')\| \leq k\|\ell - \ell'\|$ donc $1 \leq k$ (car $\ell \neq \ell'$).
Contradiction. \square

Exemples et contre-exemples.**2) Sur la nécessité d'avoir une contraction stricte.**

- (a) $g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2} \in]0, 1[$ pour tout réel t .

Si x et y sont deux réels quelconques, l'égalité des accroissements finis numériques (applicable car g est bien continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$) prouve l'existence d'un réel c compris entre x et y tel que $g(x) - g(y) = g'(c)(x - y)$ d'où l'inégalité demandée. \square

- (b) S'il existait un point fixe ℓ pour g on aurait $\arctan \ell = \frac{\pi}{2}$ ce qui est impossible. \square

Donc g n'est pas une contraction stricte sinon le théorème du point fixe s'appliquerait (sur \mathbb{R} bien complet). \square

On peut d'ailleurs le vérifier par un calcul direct :

Supposons que g soit contractante de rapport $k < 1$. Soient alors $\alpha \in]k, 1[$ et $c > 0$ tel que $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \geq \alpha$ pour tout $x \geq c$ (bien possible car $\alpha < 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 1$).

Il vient alors pour tout $h > 0$: $\Delta(h) = \frac{|g(c+h) - g(c)|}{|h|} \leq k$ donc $|g'(c)| = \lim_{h \rightarrow 0^+} \Delta(h) \leq k$.

Contradiction puisque $g'(c) \geq \alpha > k$. \square

3) Un exemple.

- (a) La fonction g est contractante (rapport $\frac{1}{5}$) sur \mathbb{R} (complet) et y admet donc un unique point fixe ℓ limite de toute suite itérée par g . Or un calcul immédiat fournit $\ell = \frac{5}{4}$. Toute suite itérée par g converge donc vers $\frac{5}{4}$. \square

- (b) Soit x un réel quelconque fixé. On a $f(g(t)) = f(t)$ pour tout réel t par hypothèse. En particulier avec $t = g(x)$ il vient $f(g(g(x))) = f(g(x)) = f(x)$. Par itération claire $f(g^n(x)) = f(x)$ pour tout entier n . \square

- (c) Or d'après (a) il vient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(x) = \frac{5}{4}$ pour tout réel x .

Soit alors x un réel fixé quelconque. De l'égalité $f(g^n(x)) = f(x)$ pour tout entier n , on tire par passage à la limite (puisque f est continue) $f(\frac{5}{4}) = f(x)$. \square

4) Un système non linéaire dans \mathbb{R}^2

- (a) Toutes les normes sur \mathbb{R}^2 , espace de dimension finie, sont équivalentes et définissent donc la même topologie qui en fait un espace complet. \square
- (b) Inégalités immédiates par l'inégalité des accroissements finis. \square
- (c) Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments quelconques de \mathbb{R}^2 . Il vient :

$$\begin{aligned}
\|\psi(x_2, y_2) - \psi(x_1, y_1)\|_1 &= \frac{1}{4} |\sin(x_2 + y_2) - \sin(x_1 + y_1)| + \frac{2}{3} |\arctan(x_2 - y_2) - \arctan(x_1 - y_1)| \\
&\leq \frac{1}{4} |(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)| + \frac{2}{3} |(x_2 - y_2) - (x_1 - y_1)| \\
&\leq \frac{1}{4} (|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|) + \frac{2}{3} (|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|) \\
&= \frac{11}{12} \|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)\|_1
\end{aligned}$$

Donc ψ est contractante sur $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ de rapport $\frac{11}{12}$ \square

(d) Ainsi, compte tenu du théorème du point fixe, l'équation $\psi(x, y) = (x, y)$ c'est à dire encore le système (S) admet une unique solution (α, β) limite de toute suite itérée par la fonction ψ . \square

(e) $\psi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (0, 1 + \frac{\pi}{6})$ et $\psi(0, 0) = (0, 1)$ donc $\|\psi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) - \psi(0, 0)\|_\infty = \frac{\pi}{6}$ alors que $\|(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) - (0, 0)\|_\infty = \frac{1}{2}$.

Or $\frac{\pi/6}{1/2} = \frac{\pi}{3} > 1$ ce qui prouve que ψ n'est pas une contraction stricte pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ \square

Ainsi la condition de contraction stricte n'est pas superflue comme le prouve la question 2) mais n'est pas non plus nécessaire. D'ailleurs comme le montre cet exemple une même application peut être contractante pour une norme et non contractante pour une norme équivalente ! \square

Partie III : Une équation intégrale.

5) Questions de cours.

(a) Notons déjà que comme on se restreint à l'espace F des applications bornées, $\|\cdot\|_\infty$ est bien définie sur F .

Les propriétés d'homogénéité ($\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$) et de non dégénérescence ($(\|f\|_\infty = 0) \implies (f = 0)$) sont claires.

Reste la sous-additivité. Soient f et g deux éléments quelconques de F .

On a $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Donc $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ par définition même de la borne supérieure. \square

Le fait que $(F, \|\cdot\|_\infty)$ soit complet (admis ici) est un exercice classique.

(b) Une application continue sur le compact $[0, 1]$ est bornée. \square

(c) Soit a quelconque fixé dans G et soit $\varepsilon > 0$ quelconque donné.

Comme la suite (g_n) converge uniformément sur G vers g , il existe N_0 tel que $n \geq N_0$ implique $\|g - g_n\|_\infty \leq \varepsilon$.

Il vient alors pour tout $h \in G$:

$$\begin{aligned}
\|g(a+h) - g(a)\| &\leq \|g(a+h) - g_{N_0}(a+h)\| + \|g_{N_0}(a+h) - g_{N_0}(a)\| + \|g_{N_0}(a) - g(a)\| \\
&\leq 2\varepsilon + \|g_{N_0}(a+h) - g_{N_0}(a)\|
\end{aligned}$$

Or g_{N_0} en particulier est continue sur G donc en a et il existe $\alpha > 0$ tel que $\|h\| \leq \alpha$ implique $\|g_{N_0}(a) - g(a)\| \leq \varepsilon$.

Ainsi finalement $\|h\| \leq \alpha$ implique $\|g(a+h) - g(a)\| \leq 3\varepsilon$ ce qui prouve que g est continue en a . \square

(d) Le résultat précédent montre (par caractérisation séquentielle de l'adhérence) que E est un sous-espace fermé de $(F, \|\cdot\|_\infty)$. Or un sous-espace fermé d'un espace complet est complet (pour la norme induite).

Ainsi $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est-il bien un espace complet. \square

6) Une équation intégrale.

(a) En tant que fermé borné (ou produit de deux compacts) $[0, 1]^2$ est compact donc $|K|$ qui est continue sur $[0, 1]^2$ y est bornée et y atteint ses bornes. \square

(b) Pour démontrer que $\Phi(f) \in E$ c'est à dire que $\Phi(f)$ est continue sur $[0, 1]$ il suffit de prouver que

$$\varphi : x \mapsto \int_0^1 K(x, y) f(y) dy \text{ est continue.}$$

Or $(x, y) \mapsto K(x, y) f(y)$ est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$ et le théorème de continuité d'une intégrale propre à paramètre prouve le résultat. \square

(c) Soient $(f_1, f_2) \in E^2$. Il vient immédiatement pour tout $x \in [0, 1]$:

$$|\Phi(f_2)(x) - \Phi(f_1)(x)| \leq |\lambda| \int_0^1 |K(x, y)| |f_2(y) - f_1(y)| dy \leq |\lambda| \int_0^1 M \|f_2 - f_1\|_\infty dy = \lambda M \|f_2 - f_1\|_\infty$$

Donc si $|\lambda| < M^{-1}$ l'application Φ est une contraction stricte de l'espace de Banach $(E, \|\cdot\|_\infty)$ donc admet un unique point fixe d'où le résultat. \square

Remarque : L'énoncé suppose implicitement $M \neq 0$ c'est à dire K non nulle. Si tel est le cas, Φ est constante égale à g , et le résultat est bien sûr encore vrai.

Partie IV : Une application géométrique.

(a) Considérons la projection orthogonale p de la droite (CB) sur la droite (CA) . Comme l'angle de droite $\left((CB), (CA)\right)$ est égal à c modulo π il vient que si U et V sont deux points quelconques distincts de (BC) on a $\frac{p(U)p(V)}{UV} = |\cos c|$.

En considérant d'une part le couple $(U, V) = (M, M')$ et le couple $(U, V) = (M, C)$ on obtient :

$$\frac{P_M P_{M'}}{MM'} = \frac{P_M C}{MC} = |\cos c| \quad \square$$

(b) De même par projection orthogonale de la droite (AC) sur la droite (AB) on obtient $\frac{Q_M Q_{M'}}{P_M P_{M'}} = |\cos a|$

puis $\frac{R_M R_{M'}}{Q_M Q_{M'}} = |\cos b|$ par projection orthogonale de la droite (BA) sur la droite (BC) .

$$\text{Donc } \frac{R_M R_{M'}}{MM'} = |\cos a \cos b \cos c| = k < 1.$$

Ainsi si x et x' sont deux réels quelconques distincts on a, en notant M et M' les deux points de l'axe des x d'abscisses respectives x et x' : $|\varphi(x') - \varphi(x)| = R_M R_{M'} \leq k MM' = k|x' - x|$

Donc φ est une contraction stricte de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et partant elle admet un unique point fixe c'est à dire il existe un unique point M de la droite (BC) tel que $R_M = M$. \square