1) Soit $u : C^\infty(]0,1]) \to C^\infty(]0,1])$, avec $u(f)(x) = xf'(x)$ on a $(\phi_{\lambda_{|]0,1]}})_{\lambda\geq 0}$ est une famille de vecteurs propres de u associée à des valeurs propres deux à deux distinctes donc elle est libre par suite $(\phi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ l'est aussi.

2) $A_nD_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{A_n}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{A_n}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{A_n}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$ l'opération $C_n \leftarrow C_n + \sum\limits_{1\leq k\leq n-1} A_kC_k$ donne

$$A_nD_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & R(a_1) \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & R(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & R(a_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & R(a_n) \end{vmatrix} = D_{n-1}R(a_n).$$

3) Si les a_k ou les b_k ne sont pas distincts le déterminant aura deux lignes ou deux colonnes égales donc sera nul, le résultat demandé est vrai.

Si les $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ sont deux à deux distincts ainsi que les $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ on a $R(X)$ est de la forme

$$R(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X+b_k} \text{ et } A_n = \lim_{x\to -b_n} (x+b_n)R(x) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(-b_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(-b_n+b_k)} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_k+b_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}.$$

$$R(a_n) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n+b_k)} \text{ donc } D_n = \frac{R(a_n)}{A_n}D_{n-1} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)(b_n-b_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n+b_k)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_k+b_n)}D_{n-1}.$$

On a $D_1 = \frac{1}{a_1+b_1}$ donc $D_2 = \dfrac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)(a_1+b_2)}D_1 = \dfrac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{\prod\limits_{\substack{1\leq i\leq 2\\1\leq j\leq 2}}(a_i+b_j)}$.

Supposons le résultat pour n-1 alors :

$$D_n = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)(b_n-b_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n+b_k)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_k+b_n)} \frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n-1}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\leq i\leq n-1\\1\leq j\leq n-1}}(a_i+b_j)} = \frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}(a_i+b_j)}$$

4) Par caractérisation de la borne inférieure on a $d(x,A) = 0$ ssi

$\forall\varepsilon > 0, \exists y \in A,\ d(x,y) < \varepsilon$ càd $\forall\varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon)\cap A \neq \varnothing$ ce qui est équivalent à $x \in \overline{A}$.

5) On a $A_n \subset A_{n+1}$ donc $d(x,A_n) \geq d(x,A_{n+1})$ la suite $d(x,A_n)$ est donc décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x,A_n) = \inf\limits_{n\geq 0} d(x,A_n)$.

On a $\forall n\in\mathbb{N}, A_n \subset A$ donc $d(x,A_n) \geq d(x,A)$ par suite $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} d(x,A_n) \geq d(x,A)}$.

Soit $y \in A$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $y \in A_{n_0}$ donc $d(x,y) \geq d(x,A_{n_0}) \geq \inf\limits_{n\geq 0} d(x,A_n)$ ainsi

$\forall y \in A,\ d(x,y) \geq \lim\limits_{n\to+\infty} d(x,A_n)$ en passant à l'inf sur y on obtient $\underline{d(x,A) \geq \lim\limits_{n\to+\infty} d(x,A_n)}$

Finalement $d(x,A) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x,A_n)$.

6) Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $B\cap V$ donc c'est une suite bornée d'éléments de V qui est de dimension fini donc par Bolzano-Weierstrass $(y_n)_{n\geq 0}$ admet une valeur d'adhérence $y \in V$ or B est fermée donc $y \in B\cap V$ finalement $B\cap V$ est compact .

On a $B\cap V \subset V$ donc $\underline{d(x,B\cap V) \geq d(x,V)}$. Soit $y \in V$, si $y \in B$ alors $d(x,y) \geq d(x,B\cap V)$ si $y \notin B$ alors $d(x,y) > d(x,0) \geq d(x,B\cap V)$ car $0 \in B\cap V$.

Ainsi $\forall y \in V,\ d(x,y) \geq d(x,B\cap V)$ donc $\underline{d(x,V) \geq d(x,B\cap V)}$ enfin $d(x,V) = d(x,B\cap V)$.

7) L'application $y \to \|x-y\|$ est continue sur le compact $B\cap V$ donc elle atteint sa borne inférieure d'où l'existence de $y \in V$ tel que $d(x,B\cap V) = \|x-y\|$ càd $d(x,V) = \|x-y\|$.

8) Notez que la projection orthogonale sur V existe car V de dimension finie.

Soit y la projection orthogonale de x sur V et $z \in V$ on a :

$x-z = (x-y)+(y-z),\ x-y \in V^\perp$ et $y-z \in V$ donc par Pythagore on a

$\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$ on a donc :

$\forall z \in V,\ d(x,z) \geq \|x-y\|$ avec égalité ssi $z = y$, par suite y est l'unique élément de V

vérifiant $d(x,V) = \|x-y\|$.

9) Soit $V = vect(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $u : V \to \mathbb{K}^n,\ x \mapsto ((x_1|x),..,(x_n|x))$.

On a u est linéaire, montrons qu'elle est injective:

si $u(x) = 0$ alors $\forall i \in [1,n],\ (x_i|x) = 0$ donc $x \in V^\perp$ or $x \in V$ donc $x = 0$.

Comme u est injective alors:

$$\begin{aligned}(x_1,..,x_n) \text{ liée } &\Leftrightarrow (u(x_1),..,u(x_n)) \text{ liée}\\ &\Leftrightarrow \det{}_e(u(x_1),..,u(x_n)) = 0 \ \ (e \text{ la base canonique de } \mathbb{K}^n)\\ &\Leftrightarrow G(x_1,..,x_n) = 0\end{aligned}$$

10) Soit y la projection orthogonale de x sur V donc $x-y \in V^\perp$ par suite $\forall i \in [1,n]$,

$(x_i|x-y) = 0$ donc $(x_i|x) = (x_i|y)$ et $(x|x) = \|x-y+y\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y\|^2$ donc

$$G(x_1,..,x_n,x) = \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & \dots & (x_1|x_n) & (x_1|y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_n|x_1) & \dots & (x_n|x_n) & (x_n|y) \\ (y|x_1) & \dots & (y|x_n) & \|y\|^2+\|x-y\|^2 \end{vmatrix}$$ par linéarité par rapport à la dernière colonne on obtient :

$$G(x_1,..,x_n,x) = G(x_1,..,x_n,y) + \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & \dots & (x_1|x_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_n|x_1) & \dots & (x_n|x_n) & 0 \\ (y|x_1) & \dots & (y|x_n) & \|x-y\|^2 \end{vmatrix}$$ et comme $(x_1,..,x_n,y)$ est

liée alors $G(x_1,..,x_n,y) = 0$ donc $G(x_1,..,x_n,x) = \|x-y\|^2 G(x_1,..,x_n)$, or $(x_1,..,x_n)$ est libre

donc $G(x_1,..,x_n)$ est non nul d'où $\frac{G(x_1,...,x_n,x)}{G(x_1,...,x_n)} = \|x-y\|^2 = d(x,V)^2$.

11) $N_2(f)^2 = \int_0^1 f^2(t)dt \leq \int_0^1 N_\infty(f)^2 dt = N_\infty(f)^2$ d'où $N_2(f) \leq N_\infty(f)$.

Soit $f \in \overline{A}^\infty$ donc il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A tel que $N_\infty(f_n - f)$ tend vers 0

et comme $N_2(f_n - f) \leq N_\infty(f_n - f)$ alors $N_2(f_n - f)$ tend aussi vers 0 donc $f \in \overline{A}^2$.

12) Soit $(g_n)_{n\geq 0}$ la suite d'éléments de V_0 défini par $g_n(t) = 1-(1-t)^n$ on a

$\|\phi_0 - g_n\|_2^2 = \int_0^1 (1-t)^{2n}dt = \frac{1}{2n+1}$ tend vers 0 donc $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$.

13) Notons $E = C([0,1])$. Soit $f \in E$ et $g = f - f(0)\phi_0$ on a $g \in V_0$ et $f = g + f(0)\phi_0$

or $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$ donc il existe une suite $(g_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de V_0 qui tend vers ϕ_0 donc

$g + f(0)g_n$ est une suite d'éléments de V_0 qui tend vers f d'où $\overline{V_0}^2 = E$.

On a $B(\phi_0, \frac{1}{2}) \cap V_0 = \varnothing$ donc $\phi_0 \notin \overline{V_0}^\infty$ donc $\overline{V_0}^\infty \neq E$.

14) On a $0 \in V \subset \overline{V}$, soient x, y deux éléments de $\overline{V}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ donc il existe $(x_n)_{n\geq 0}$ et

$(y_n)_{n\geq 0}$ suites d'éléments de V telles que $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers x et $(y_n)_{n\geq 0}$ tend vers y

comme V est un espace vectoriel alors $\lambda x_n + y_n \in V$ or la suite $\lambda x_n + y_n$ tend vers $\lambda x + y$

donc $\lambda x + y \in \overline{V}$, ainsi $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.

15) et 16) Soit $E = C([0,1])$ et $\mathcal{P} = vect(\phi_m)_{m\geq 0}$, d'aprés Stone-Weierstrass $E = \bar{\mathcal{P}}^\infty$ donc

d'aprés 11) on a aussi $E = \bar{\mathcal{P}}^2$. Soit $q \in \{2,\infty\}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ si V est dense dans E pour N_q alors $\forall m \in \mathbb{N},\ \phi_m \in E = \overline{V}^q$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Comme $\overline{V}^q$ est un espace vectoriel contenant les ϕ_m alors $\mathcal{P} \subset \overline{V}^q$ donc

$\bar{\mathcal{P}}^q \subset \overline{V}^q$ càd $E \subset \overline{V}^q$ ainsi $\overline{V}^q = E$.

17) On a $(W_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de parties de $C([0,1])$ et $W = \bigcup\limits_{n\geq 0} W_n$

donc d'aprés 5) on a $d(\phi_\mu, W) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n)$ donc d'aprés 4) on a $\phi_\mu \in \overline{W}^2$ ssi

$\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ d'où par 16) on a : W est dense pour N_2 ssi $\forall \mu \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$.

18) On munit $C([0,1])$ du produit scalaire : $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. D'aprés 1) on a $(\phi_k)_{0\leq k\leq n}$

est une base de W_n donc d'aprés 10) on a $d(\phi_\mu, W_n)^2 = \dfrac{G(\phi_0,\phi_1,..,\phi_n,\phi_\mu)}{G(\phi_0,\phi_1,..,\phi_n)}$.

On a $\phi_i|\phi_j = \frac{1}{1+\lambda_i+\lambda_j}$, pour $0 \leq i \leq n$ posons $a_i = b_i = \frac{1}{2} + \lambda_i$ et $a_{n+1} = b_{n+1} = \frac{1}{2} + \mu$

donc d'aprés 3) on a :

$$G(\phi_0,\phi_1,..,\phi_n,\phi_\mu) = \frac{\prod\limits_{0\leq i<j\leq n+1} (a_j - a_i)^2}{\prod\limits_{\substack{0\leq i\leq n+1\\0\leq j\leq n+1}} (a_i + a_j)}$$ et $$G(\phi_0,\phi_1,..,\phi_n) = \frac{\prod\limits_{0\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)^2}{\prod\limits_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}} (a_i + a_j)}$$ d'où

$$d(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{\prod_{i=0}^{n} (a_{n+1} - a_i)^2}{\prod_{j=0}^{n+1} (a_{n+1} + a_j) \prod_{i=0}^{n} (a_i + a_{n+1})} = \frac{\prod_{i=0}^{n} (\mu - \lambda_i)^2}{2a_{n+1}\left[\prod_{i=0}^{n} (a_i + a_{n+1})\right]^2}$$

$$= \frac{1}{1+2\mu}\left[\frac{\prod_{0\le i\le n} (\mu - \lambda_i)}{\prod_{i=0}^{n} (1 + \lambda_i + \mu)}\right]^2$$ finalement $d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{i=0}^{n} \frac{|\lambda_i - \mu|}{\lambda_i + \mu + 1}$.

19) On a $\frac{\lambda_k-\mu}{1+\lambda_k+\mu} \le \frac{|\lambda_k-\mu|}{1+\lambda_k+\mu} \le \frac{\lambda_k+\mu}{1+\lambda_k+\mu}$ donc $\frac{1}{1+\lambda_k+\mu} \le 1 - \frac{|\lambda_k-\mu|}{1+\lambda_k+\mu} \le \frac{1+2\mu}{1+\lambda_k+\mu}$

il en résulte que la suite $\frac{|\lambda_k-\mu|}{1+\lambda_k+\mu}$ tend vers 1 ssi λ_k tend vers $+\infty$.

20) D'aprés 17) et 18) on a W est dense dans $C([0,1])$ pour N_2 ssi pour tout $\mu \in \mathbb{N}$,

la suite $p_n(\mu) := \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Si $\mu \in \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ alors $p_n(\mu)$ est stationnaire en zéro donc tend vers 0, donc

$\overline{W}^2 = C([0,1]) \iff \forall \mu \in \mathbb{N}\backslash\{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, la suite $p_n(\mu)$ tend vers 0.

Soit $\mu \in \mathbb{N}\backslash\{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, posons $u_n = \frac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1} \in]0,1]$. On a $\prod_{k=0}^{n} u_k$ tend vers 0 équivalent à

la suite $\sum_{k=0}^{n} \ln(u_k)$ tend vers $-\infty$ càd la série $\sum_{k\ge0} \ln(u_k)$ diverge (car $\ln u_k \le 0$).

•Si u_n ne tend pas vers 1 alors les séries $\sum_{n\ge0} 1 - u_n$ et $\sum_{n\ge0} \ln u_n$ divergent grossièrement.

• Si u_n tend vers 1 alors $-\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 - u_n \ge 0$ donc les séries $\sum_{n\ge0} 1 - u_n$ et $\sum_{n\ge0} \ln u_n$ sont

de même nature on conclut donc que $\prod_{k=0}^{n} u_k$ tend vers 0 ssi $\sum_{n\ge0} 1 - u_n$ diverge.

D'autre part on a $\frac{1}{1+\lambda_n+\mu} \le 1 - u_n \le \frac{1+2\mu}{1+\lambda_n+\mu}$ donc $\sum_{n\ge0} 1 - u_n$ diverge ssi $\sum_{n\ge0} \frac{1}{1+\lambda_n+\mu}$ diverge

Les λ_n sont deux à deux distincts, $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \ge n_0,\ \lambda_n \ne 0$.

Si λ_n tend vers $+\infty$ alors $\frac{1}{1+\lambda_n+\mu} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda_n}$ donc les séries $\sum_{n\ge0} \frac{1}{1+\lambda_n+\mu}$ et $\sum_{n\ge n_0} \frac{1}{\lambda_n}$ sont de

même nature . Si λ_n ne tend pas vers $+\infty$ les deux séries divergent donc sont encore de même nature, finalement $\overline{W}^2 = C([0,1])$ ssi $\sum_{n\ge n_0} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge.

Notez que si $\mathbb{N}\backslash\{(\lambda_k)_{k\ge0}\} = \emptyset$, alors $\{\frac{1}{k}, k \ge 1\} \subset \{\frac{1}{\lambda_k}, \lambda_k$ non nul $\}$ donc $\sum_{n\ge n_0} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge.

21) Résulte de 11) et 20).

22) il suffit de montrer que $\forall f \in C^1([0,1]) \cap V_0,\ N_\infty(f) \le N_2(f')$.

Soit $x \in [0,1]$, $|f(x)| = |f(x) - f(0)| = \left|\int_0^x f'(t)dt\right| \le \int_0^x \left|f'(t)\right| dt \le \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt$

donc d'aprés Cauchy schwarz $N_\infty(f) \le \left(\int_0^1 1^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = N_2(f')$.

<u>Remarque</u>: Notez qu'avec les mêmes calculs si on suppose seulement $\lambda_k \ge 1$ pour tout

$k \in \{1,..,n\}$ on aura pour $\mu \ge 1$, $N_\infty(\phi_\mu - \sum_{k=1}^{n} a_k\phi_{\lambda_k}) \le N_2(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=1}^{n} a_k\lambda_k\phi_{\lambda_k-1})$.

23) Comme les λ_k sont deux à deux distincts alors il existe $k_1 \ge 1$ tel que

$\forall k \ge k_1,\ \lambda_k \ne 1$, donc $\forall k \ge k_1,\ 0 < \lambda_k - 1 \le \lambda_k$ d'où $\frac{1}{\lambda_k-1} \ge \frac{1}{\lambda_k} > 0$ or $\sum_{k\ge k_1} \frac{1}{\lambda_k}$ est

divergente donc $\sum_{k\ge k_1} \frac{1}{\lambda_k-1}$ l'est aussi d'où d'aprés 20) on a $\overline{vect(\phi_{\lambda_k-1})_{k\ge1}}^2 = C([0,1])$, donc

pour $\mu \ge 1$ et $\varepsilon > 0$ il exite $n \in \mathbb{N}$ et des réels $(b_k)_{1\le k\le n}$ tel que $N_2(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=1}^{n} b_k\phi_{\lambda_k-1}) < \varepsilon$

donc d'aprés la remarque faite en 22) on a $N_\infty(\phi_\mu - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\lambda_k}\phi_{\lambda_k}) < \varepsilon$, ainsi $\phi_\mu \in \overline{W}^\infty$

de plus $\phi_0 = \phi_{\lambda_0} \in W \subset \overline{W}^\infty$ d'où $\forall \mu \in \mathbb{N},\ \phi_\mu \in \overline{W}^\infty$ et on conclut par 15).

24) On a $\inf_{k\ge1} \lambda_k > 0$ donc il existe $r \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall k \ge 1,\ \lambda_k \ge \frac{1}{r}$ donc $\forall k \ge 1,\ r\lambda_k \ge 1$

et $\sum_{k\ge1} \frac{1}{r\lambda_k}$ diverge donc d'aprés 23) on a $\overline{vect(\phi_{r\lambda_k})_{k\ge0}}^\infty = C([0,1])$ et en remarquant que

$\forall f \in C([0,1]),\ N_\infty(f) = N_\infty(f \circ \phi_r)$ on déduit que $N_\infty(\phi_\mu - \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_{\lambda_k}) = N_\infty(\phi_{\mu r} - \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_{r\lambda_k})$

par suite la densité de $vect(\phi_{r\lambda_k})_{k\ge0}$ entraine celle de $vect(\phi_{\lambda_k})_{k\ge0}$.

Fin

Lhachimi Lahcen, email: lllahcen@gmail.com