**Exercice 1** Soient $E$ et $F$ de dimensions finies et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
2. En déduire que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$.

**Exercice 2** Soit $(f, g) \in (L(E))^2$ où $E$ est un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$, montrer les inégalités :

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \inf(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$$

(on pourra utiliser $g_{|\ker(f \circ g)} = h$ dont on déterminera le noyau)

**Exercice 3** Soit $(f, g) \in (L(E))^2$ où $E$ est un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$, tel que : $(f+g)$ est inversible et $fg = 0$. Montrer que :

$$rg(f) + rg(g) = n.$$

**Exercice 4** Soit $U$ un sous-espace vectoriel de $E$ espace vectoriel, et

$$A = \{f \in L(E) | U \subset Ker(f)\}.$$

Montrer que $A$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$. Si $E$ est de dimension finie, quelle est la dimension de $A$ ?

**Exercice 5** Soient $H_1$ et $H_2$ deux hyperplans de $E$, espace vectoriel de dimension $n$. Montrer que :

$$\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant n - 2.$$

Généraliser.

**Exercice 6** Donner un exemple d'endomorphisme d'un espace vectoriel injectif et non surjectif, puis d'un endomorphisme surjectif et non injectif.

**Exercice 7** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$, montrer l'équivalence :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2.$$

Donner un contre-exemple quand $\dim E = +\infty$.

**Exercice 8** Soit $(f, g) \in L(E, F)^2$ avec $E, F$ de dimension finie. On suppose

$$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}\, f;$$
$$\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\}.$$

**Exercice 9** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et $(f, g) \in L(E)^2$ avec $E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

**Exercice 10** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et $(f_1, \ldots, f_k)$ des projecteurs de $E$. Montrer l'équivalence :

$$\left[\forall (i,j) \in \{1, \ldots, k\}^2, i \neq j \Rightarrow f_i f_j = 0\right] \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} f_i \text{ est un projecteur.}$$

**Exercice 11** Soit $f \in L(E)$ où $E$ est un $K$-espace vectoriel de dimension $n$, tel que :

$$f^2 = -Id.$$

1. Montrer que $f$ est inversible et que la dimension de $E$ est paire, donc $n = 2p$.
2. Soit $x \neq 0$, monter que $x$ et $f(x)$ sont linéairement indépendants, et qu'ils engendrent un sous-espace stable de $E$.
3. Montrer qu'il existe $p$ sous-espaces de dimension deux stables par $f$, $E_1 \ldots E_p$ tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. En déduire une "bonne" formule de calcul de $f$.

**Exercice 12** Soit $E$ un $K$ espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $f \in L(E)$ nilpotente. On note $q \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de $f$, i.e.:

$$q = \inf\{j \in \mathbb{N}^* | f^j = 0\}.$$

1. Montrer que : $\exists x_0 \in E$ tel que $\{x_0, f(x_0), \ldots, f^{q-1}(x_o)\}$ soit libre. En déduire $q \leqslant n$.
2. Soit $r = \dim Ker(f)$. Montrer que $r > 0$ et que

$$\frac{n}{r} \leqslant q \leqslant n + 1 - r.$$