Exercice 1 Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$, et λ un nombre réel. Soit ϕ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$\begin{cases} \phi(\vec{e_1}) &= \vec{e_1}+\vec{e_2} \\ \phi(\vec{e_2}) &= \vec{e_1}-\vec{e_2} \\ \phi(\vec{e_3}) &= \vec{e_1}+\lambda\vec{e_3} \end{cases}$$

Ecrire l'image du vecteur $\vec{v} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$. Comment choisir λ pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Exercice 2 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ non nul; montrer que f est injective si et seulement si pour tout couple (E_1, E_2) de sous-espaces supplémentaires de E, la somme $f(E_1) + f(E_2)$ est directe.

Exercice 3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On suppose :

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x.$$

Montrer qu'il existe $\mu \in K$ tel que $f = \mu Id_E$.

Exercice 4 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f + Id_E$. Montrer que f est un automorphisme.

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que $E = \ker(f - Id) \oplus \ker(f - 2Id)$.

Exercice 6 Montrer que si $p < q$ il n'existe pas d'application linéaire surjective de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^q$. Montrer que si $q < p$ il n'existe pas non plus d'application linéaire injective de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^q$.

Exercice 7 Déterminer la nature et les éléments de l'application linéaire

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \frac{1}{3}(-x + 2y, -2x + 4y) \end{cases}$$

Exercice 8 E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E: $E = F \oplus G$. On pose $s(u) = u_F - u_G$ où $u = u_F + u_G$ est la décomposition (unique) obtenue grâce à $E = F \oplus G$. s est la symétrie parrapport à F de direction G.

1. Montrer que $s \in L(E)$, que $u \in F \Leftrightarrow s(u) = u, u \in G \Leftrightarrow s(u) = -u$, donner $\ker(s)$ et calculer s^2.
2. Réciproquement si $f \in L(E)$ vérifie $f^2 = id_E$. On pose $p = \dfrac{1}{2}(f + id_E)$. Calculer $f(u)$ en fonction de $p(u)$ et u. Vérifier que p est un projecteur, calculer son noyau et son image. Montrer que f est la symétrie par rapport à $F = \{u \in E | f(u) = u\}$ de direction $G = \{u \in E | f(u) = -u\}$.

Exercice 9 Soient p et q deux projecteurs de E, espace vectoriel, tels que $pq = qp$ (p et q commutent). Montrer que pq et $(p + q - pq)$ sont deux projecteurs de E, et que :

$$\mathrm{Im}(pq) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q,$$

$$\mathrm{Im}(p + q - pq) = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q.$$

Exercice 10 Soient p et q deux projecteurs de E, espace vectoriel; donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p + q$ soit un projecteur de E ; donner alors $\mathrm{Im}(p + q)$ et $\ker(p + q)$.
Indication : on montrera que $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im} \oplus \mathrm{Im}\, q$ et que $\ker(p + q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

Exercice 11 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes, et $f : E \to E$ définie par :

$$\forall P \in E,\ f(P)(X) = \frac{P(-X) - P(X)}{2}.$$

Montrer que $f \in L(E)$, que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \ker(f)$ mais que $f^2 = -f$.

Exercice 12 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$, et $f : E \to E$ définie par:

$$f(P) = P + (1 - X)P^{'}.$$

Montrer que $f \in L(E)$, donner une base de $\mathrm{Im}\, f$ et de $\ker(f)$.

Exercice 13 Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $U : E \to E$ définie par $f \mapsto U(f)$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, U(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

et $U(f)(0) = f(0)$. Montrer que $U \in L(E)$, déterminer $\ker(U)$ et $\mathrm{Im}(U)$.