Exercice 1 Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (y,x)$. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x-3$.
2. $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f \mapsto \{t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\}$. $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f \mapsto f(3/4)$.
3. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 3x+5y$. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (-x,y)$. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xy$.
4. $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f \mapsto f'$.
5. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (2x-3y+z, x-y+z/3)$.
6. $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f \mapsto \{x \mapsto f'(x) + f(x)\cdot \sin x\}$.

Exercice 2 Soient f et g, applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définies par $f(z) = \bar{z}$ et $g(z) = \Re(z)$. Montrer que f et g sont linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-e.v., et non linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-e.v.

Exercice 3 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, on définit l'application $f : F \times G \to \mathbb{R}^n$ par $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 4 Soit E, F, G trois espaces vectoriels, f et g deux applications linéaires $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$; montrer que :

$$\ker(g\circ f) = f^{-1}(\ker g \cap \operatorname{Im} f) = f^{-1}(\ker g).$$

Exercice 5 Soit E un espace vectoriel, et u une application linéaire de E dans E. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ est libre, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$.
2. Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est libre, il en est de même de $e_1, e_2, \dots, e_p$.
3. Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ est génératrice, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$.
4. Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est génératrice, il en est de même de $e_1, e_2, \dots, e_p$.
5. Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est une base de $\operatorname{Im} u$, alors $e_1, e_2, \dots, e_p$ est une base d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\ker u$.

Exercice 6 Soient E un espace vectoriel et φ une application linéaire de E dans E. On suppose que $\ker(\varphi) \cap \operatorname{Im}(\varphi) = \{0\}$. Montrer que, si $x \notin \ker(\varphi)$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi^n(x) \neq 0$.

Exercice 7 Pour des applications linéaires $f : E \to F$, $g : F \to G$, établir l'équivalence

$$g\circ f = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \ker g.$$

Exercice 8 Soit f un endomorphisme d'un e.v. E, vérifiant l'identité

$$f^2 + f - 2Id_E = 0\,.$$

Etablir que $\operatorname{Im}(f - Id_E) \subset \ker(f + 2Id_E)$; $\operatorname{Im}(f + 2Id_E) \subset \ker(f - Id_E)$; et $E = \ker(f - Id_E) \oplus \ker(f + 2Id_E)$.

Exercice 9 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g\circ f)$ et $\operatorname{Im}(g\circ f) \subset \operatorname{Im}(f)$.

Exercice 10 Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f\circ g = g\circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 11 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$.
Montrer que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

Exercice 12 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = f(\ker(f\circ f))$.

Exercice 13 Soit U un sous-espace vectoriel de E espace vectoriel, et

$$A = \{f \in \mathcal{L}(E) | U \subset \ker f\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 14 Donner des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $\ker f = \operatorname{Im} f$.
2. $\ker f$ inclus strictement dans $\operatorname{Im} f$.
3. $\operatorname{Im} f$ inclus strictement dans $\ker f$.

Exercice 15 Soit $(u,v) \in (\mathcal{L}(E))^2$, tels que $u^2 = u$ et $vu = 0$. Montrer que

$$\operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im} v\,.$$