Exercice 1 Soit $\mathbb{R}_+^*$ muni de la loi interne $\oplus$ définie par $a \oplus b = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et de la loi externe $\otimes$ telle que $\lambda \otimes a = a^\lambda, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2 Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0\right\}$$
$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(1) = 0\}, \qquad E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(0) = 1\}$$
$$E_4 = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f' = 3\right\}, \qquad E_5 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + \alpha y + 1 \geqslant 0\right\}.$$

Exercice 3 Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels :

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0, 1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.
2. L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ pour les mêmes opérations.
3. L'ensemble des solutions (x_1, x_2, x_3) du système : $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 & = & 0. \end{cases}$
4. L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ vérifiant $f(1/2) = 0$.
5. L'ensemble des fonctions de classe C^2 vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.

Exercice 4 Montrer que l'ensemble $\mathcal{E} = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} / (\exists (a, \varphi) \in \mathbb{R}^2)(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = a\cos(x - \varphi)\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que
$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
2. Soient H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que
$$G \subset F \Longrightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$

Exercice 6 Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1}(1, 1, 0)$, $\vec{v_2}(4, 1, 4)$ et $\vec{v_3}(2, -1, 4)$.

1. Montrer que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$, puis avec $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.
2. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est-elle libre ?

Exercice 7 Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v_1}(1, 0, 1)$, $\vec{v_2}(0, 2, 2)$ et $\vec{v_3}(3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v_1}(1, 0, 0)$, $\vec{v_2}(0, 1, 1)$ et $\vec{v_3}(1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_2}, \vec{e_3})$.
2. $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$.
3. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_1} + \vec{e_4}, \vec{e_4})$.
4. $(3\vec{e_1} + \vec{e_3}, \vec{e_3}, \vec{e_2} + \vec{e_3})$.
5. $(2\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_1} - 3\vec{e_2}, \vec{e_4}, \vec{e_2} - \vec{e_1})$.

Exercice 9 Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{e_1}(1, 2, 3, 4)$ et $\vec{e_2}(1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$?

Exercice 10 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 11 Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $V_1 = (1, 1, 1, 1)$, $V_2 = (1, 2, 3, 4)$, $V_3 = (3, 1, 4, 2)$, $V_4 = (10, 4, 13, 7)$, $V_5 = (1, 7, 8, 14)$. Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.

Exercice 12 Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}\{(1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5)\} \\ G &= \text{Vect}\{(-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)\} \end{aligned}$$