

Exercice 1 Que penser-vous de l'énoncé suivant : si $(u_n) \sim (v_n)$ alors $(e^{u_n}) \sim (e^{v_n})$. Donner un énoncé correct.

Exercice 2 1. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N} u_n \neq 0$ et si $(u_n) \rightarrow 0$ alors $\ln(1 + u_n) \sim u_n$.

2. Soit a un réel. Déterminer la limite de $(1 + \frac{a}{n})^n$.

Exercice 3 Comparer les suites suivantes :

$$a_n = n^n, \quad b_n = n^{\ln(n)}, \quad c_n = e^{n^2}, \quad d_n = (\ln n)^{n \ln n}$$

Exercice 4 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles de limite $+\infty$ telles que $u_n = o(v_n)$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

Exercice 5 Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in [0, 1], u_{n+1} = u_n^2.$$

Donner un équivalent de u_n quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 6 Montrer la réciproque du théorème de Césaro (i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$) :

1. dans le cas où $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$ et $u_{n+1} - u_n = O(\frac{1}{n})$.
2. dans le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 7 Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}$. En utilisant $v_n = \frac{u_n^2}{4}$, donner un équivalent de u_n . *Indication* : on montrera que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{n+1} - v_n = 1$, on en déduira un équivalent de v_n puis de u_n .

Exercice 8 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. L'étudier et, en utilisant $v_n = \frac{1}{u_n}$, en donner un équivalent dans le cas $u_0 \in]-1; 0]$. Que dire dans le cas $u_0 \in]0; \infty[$? (On étudiera $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.)

Exercice 9 Soient f et g deux formes linéaires sur un espace vectoriel E telles que $fg = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$. Étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2}$. En étudiant $y_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$, en donner un équivalent.

Exercice 10 Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[, u_{n+1} = \sin u_n.$$

Donner $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$, en déduire un équivalent de u_n^{-2} donc de u_n .

Exercice 11 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! x_n \in [n, n+1[$ solution de $x - E(x) = \frac{1}{x^2}$. Donner un équivalent de x_n puis faire un développement asymptotique de $x_n - n$ à l'ordre 5 en fonction de $\frac{1}{n}$.

Exercice 12 Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \dots - \frac{1}{n^2}.$$

On admettra que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$ quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 13 Soit (u_n) définie par u_0 et u_1 strictement positifs et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que $\lim(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ existe et la déterminer. Que remarquez-vous ?
2. Soit $a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n .
3. Montrer que a_{2n} et a_{2n+1} sont adjacentes.
4. Déterminer un rationnel r tel que $\left| r - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| < 10^{-3}$.