

Exercice 1 Soit (u_n) une suite convergente de limite l . Montrer que la suite

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

est convergente et a pour limite l . Pour cela, encadrer u_n à ε près pour n assez grand, et en déduire un encadrement de v_n .

Exercice 2 Soit α un nombre irrationnel positif et (p_n) et (q_n) deux suites d'éléments de \mathbb{N}^* telles que $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty.$$

Exercice 3 Étudier la suite

$$u_n = \ln(1 + \ln(2 + \ln(3 + \cdots + \ln(n - 1 + \ln n) \cdots))).$$

Exercice 4 Montrer que pour $n \geq 1$, l'équation $x^n + x^{n-1} + x^2 + x - \frac{n+1}{n} = 0$ admet une unique racine positive ; on la note u_n . Étudier la suite (u_n) .

Exercice 5 Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. On considère $a \in [0, 1]$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. Si f est croissante, alors (u_n) est croissante.
2. Si (u_n) est croissante, alors f est croissante.
3. Si (u_n) est croissante et f monotone, alors f est croissante.
4. Si (u_n) converge vers une limite l , alors l est point fixe de f .
5. Si f est dérivable, alors (u_n) est bornée.
6. Si le graphe de f est au dessus de la droite d'équation $y = x$, alors (u_n) est croissante.
7. Si (u_n) converge vers un point fixe l de f , alors f est continue en l .

Exercice 6 Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que (u_n) est croissante et majorée.

2. Montrer que (u_n) converge vers le nombre réel positif l qui vérifie $l^2 - l - 1 = 0$ et calculer l .

Exercice 7 On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Montrer que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et que la fonction f est croissante sur \mathbb{R}^+ . En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leq x_n < 1/2$ pour tout $n \geq 0$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers α .

Exercice 8 Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{(u_n - 3)^2}{4}$.

Exercice 9 Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \ln(e - 1 + u_n)$.

Exercice 10 On considère la suite réelle définie par :

$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1}.$$

1. Montrer que x_n est supérieur ou égal à 1 pour tout n .
2. Montrer que si (x_n) converge, sa limite l vérifie

$$l = \sqrt{2l + 1}.$$

3. l étant définie par l'égalité de 2), est-il possible de trouver $k \in]0, 1[$ tel que

$$|x_n - l| \leq k|x_{n-1} - l|.$$

Si oui en déduire que $|x_n - l| \leq k^n|x_0 - l|$. Conclure.