

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R} . Que pensez-vous des propositions suivantes :

- Si $(u_n)_n$ converge vers un réel l alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers l .
- Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
- Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite l , il en est de même de $(u_n)_n$.

Exercice 2 Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire.
3. Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.
4. Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée.
5. Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée.
6. Si une suite (u_n) est telle que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0 alors elle est convergente

Exercice 3 1. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$?

2. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1$?
3. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = +\infty$?

Exercice 4 Étant donné $k \in \mathbb{R}_+$, que peut-on dire d'une suite (u_n) qui vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$? Application : Étudier $u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n - 2)}$.

Exercice 5 Montrer qu'une partie D est dense dans \mathbb{R} ssi tout réel est limite d'une suite de points de D .

Exercice 6 Soit A une partie bornée de \mathbb{R} et x un réel.

1. Montrer que $x = \sup(A)$ ssi x majore A et il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A qui converge vers x .
2. Énoncer un résultat analogue pour $\inf(A)$.

Exercice 7 Étudier la convergence des suites :

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n} \quad \frac{n \sin(n)}{n^2 + 1} \quad \frac{1}{n} + (-1)^n \quad (-1)^n \frac{n+1}{n}.$$

Exercice 8 Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer que $\forall n > 0 \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de H_n .
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Conclusion ?

Exercice 9 Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente.

Exercice 10 Montrer que (u_n) converge ssi $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent (leurs limites n'étant pas nécessairement égales).

Exercice 11 Étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ premier,} \\ 67 + \frac{1}{n} & \text{si non.} \end{cases}$$

Étudier la convergence de cette suite.

Exercice 12 On donne la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}.$$

En étudiant les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) , montrer que la suite (u_n) est convergente.