Exercice 1 Soit P un polynôme. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X-a$ est 1 et celui de la division de P par $X-b$ est -1, $(a \neq b)$, quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$?

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme $(X-1)^{n+2}+X^{2n+1}$ est divisible par X^2-X+1. Trouver le quotient si $n=2$.

Exercice 3 Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$ tels que X^2+2 divise $X^4+X^3+aX^2+bX+2$.

Exercice 4 Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Exercice 5 Déterminer $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^3+1)A+(X^2+X+1)B=1$.

Exercice 6 Soit n un entier positif.

1. Déterminer le pgcd des polynômes (X^n-1) et $(X-1)^n$.
2. Pour $n=3$ démontrer qu'il existe un couple de polynômes (U, V) tel que $(X^3-1)U+(X-1)^3V=X-1$. En donner un.

Exercice 7 Montrer que le polynôme $nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$ admet une racine multiple.
Application : déterminer les racines du polynôme $3X^5-5X^4+5X-3$.

Exercice 8 Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$, sans déterminer ses racines, le polynôme $P=X^4+1$, en produit de facteurs irréductibles.

Exercice 9 Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $X-a$ divise X^n-a^n.

Exercice 10 Décomposer $X^{12}-1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P=S^2+T^2$ (on utilisera la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$).

Exercice 12 Soit $n \geqslant 2$ et $P_n(X)=\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}X^k$. P_n a-t-il une racine double ?

Exercice 13 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

1. Montrer qu'il en est de même de P'.
2. Montrer que le polynôme P^2+1 n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 14 Trouver un polynôme P de degré $\leqslant 2$ tel que

$$P(1)=-2 \quad \text{et} \quad P(-2)=3 \quad \text{et} \quad P(0)=-1$$

Exercice 15 Trouver un polynôme P de degré minimum tel que

$$P(0)=1 \quad \text{et} \quad P(1)=0 \quad \text{et} \quad P(-1)=-2 \quad \text{et} \quad P(2)=4$$

Exercice 16 Résoudre l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$:

$$P(X+1)P(X)=-P(X^2).$$

Exercice 17 Décomposer les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{3}{X^3+1} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ puis sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^3}{X^3-1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$F(X)=\frac{1}{(X^3-1)^2} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ en remarquant que } F(jX)=F(X)$$

Exercice 18 Soient a et b deux réels distincts et

$$F(X)=\frac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}.$$

En utilisant la formule de Taylor en a pour $f(X)=(X-a)^nF(X)$, décomposer F sur $\mathbb{R}$.