

**Exercice 1** Soit  $x$  un nombre réel. Simplifier les sommes suivantes:

$$C = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \sum_{k=0}^n \cos kx, \text{ et}$$

$$S = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \sum_{k=0}^n \sin kx.$$

**Exercice 2** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad \cos x = -\frac{1}{2}, \quad \tan x = -1,$$

et placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions; résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right).$$

**Exercice 3** Résoudre l'équation :  $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$ , puis l'inéquation :  $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 > 0$ .

**Exercice 4** Simplifier, suivant la valeur de  $x \in [-\pi, \pi]$ , l'expression  $\sqrt{1 + \cos x} + |\sin x/2|$ .

**Exercice 5** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes: (donner les valeurs des solutions appartenant à  $]-\pi, \pi]$  et les placer sur le cercle trigonométrique).

$$1. \sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right),$$

$$2. \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right),$$

$$3. \cos(3x) = \sin(x).$$

**Exercice 6** Montrer que tout nombre complexe  $z$  non réel de module 1 peut se mettre sous la forme  $\frac{1+ir}{1-ir}$ , où  $r \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 7** Soit  $u, v$  des nombres complexes non réels tels que  $|u| = |v| = 1$  et  $uv \neq -1$ . Montrer que  $\frac{u+v}{1+uv}$  est réel.

**Exercice 8 (Entiers de Gauss)** Soit  $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib; a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

1. Montrer que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont dans  $\mathbb{Z}[i]$  alors  $\alpha + \beta$  et  $\alpha\beta$  le sont aussi.
2. Trouver les éléments inversibles de  $\mathbb{Z}[i]$ , c'est-à-dire les éléments  $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$  tels qu'il existe  $\beta \in \mathbb{Z}[i]$  avec  $\alpha\beta = 1$ .
3. Vérifier que quel que soit  $\omega \in \mathbb{C}$  il existe  $z \in \mathbb{Z}[i]$  tel que  $|\omega - z| < 1$ .
4. Montrer qu'il existe sur  $\mathbb{Z}[i]$  une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{Z}[i]$  il existe  $q$  et  $r$  dans  $\mathbb{Z}[i]$  vérifiant :

$$\alpha = \beta q + r \quad \text{avec} \quad |r| < |\beta|.$$

(Indication : on pourra considérer le complexe  $\frac{\alpha}{\beta}$ )

**Exercice 9** 1. Étudier la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par:  $z_0 = 4, z_{n+1} = f(z_n)$  où  $f$  est l'application de  $\mathbb{C}$  sur lui-même définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = i + \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})z.$$

*Indication* : on commencera par rechercher les coordonnées cartésiennes de l'unique point  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ , puis on s'intéressera à la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = z_n - \alpha.$$

2. On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, l_n = |z_{n+1} - z_n|$ . Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n l_k$$

et interpréter géométriquement.

**Exercice 10** Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ .

1. Calculer les points fixes de la fonction  $f$ , c'est à dire les nombres complexes  $z$  tels que  $f(z) = z$ .
2. Déterminer les nombres complexes  $z$  pour lesquels  $f(z)$  est réel.