Exercice 1 Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

Exercice 2 Écrire l'expression $(1 + \cos\phi + i\sin\phi)$ sous forme trigonométrique. En déduire l'expression de $(1 + \cos\phi + i\sin\phi)^n$.

Exercice 3 Mettre sous forme trigonométrique $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 4 Montrer que si $|z| \leqslant k < 1$ alors $1 - k \leqslant |1 + z| \leqslant 1 + k$. Faire un dessin et montrer qu'il peut y avoir égalité.

Exercice 5 Montrer algébriquement et géométriquement que si $|z| = 1$ alors $|1 + z| \geqslant 1$ ou $\left|1 + z^2\right| \geqslant 1$.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système:

$$|z - 1| \leqslant 1, |z + 1| \leqslant 1.$$

Exercice 7 Résoudre l'équation $\exp(z) = \sqrt{3} + 3i$.

Exercice 8 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante:

$$z^2 - (1 + a)(1 + i) z + \left(1 + a^2\right) i = 0,$$

où a est un paramètre réel.

1. Calculer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ les solutions z_1 et z_2 de (E) (indication: on pourra déterminer les racines carées complexes de $-2i(1 - a)^2$).
2. On désigne par Z_1 (resp. Z_2) les points du plan complexe d'affixe z_1 (resp. z_2) et par M le milieu de $[Z_1, Z_2]$. Tracer la courbe du plan complexe décrite par M lorsque a varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9 Déterminer les nombres complexes z tels que le triangle ayant pour sommets les points d'affixes z, z^2, z^3 soit rectangle au point d'affixe z.

Exercice 10 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

$$\text{(i)} \ \left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1, \qquad \text{(ii)} \ \left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 11 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation:

$$\frac{(z-2)}{(z-1)} = i \tag{1}$$

1. Résoudre l'équation (1). On donnera la solution sous forme algébrique.
2. Soit M, A, et B les points d'affixes respectives $z, 1, 2$. On suppose que $M \neq A$ et que $M \neq B$. Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{(z-2)}{(z-1)}$ et retrouver la solution de l'équation (1).

Exercice 12 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par

$$M(x, y) \mapsto x + iy = z,$$

où z est appelé l'affixe de M. Soit $f : P \longrightarrow P$ qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe $z' = \frac{z - i}{z + i}$.

1. Sur quel sous ensemble de P, f est-elle définie?
2. Calculer $|z'|$ pour z affixe d'un point M situé dans le demi plan ouvert
$$H := \{M(x, y) \in P \mid y > 0\}?$$
3. En déduire l'image par f de H.
   Soit $g : P \longrightarrow P$ qui à tout point M d'fixe $z \neq -1$ associe $g(M)$ d'affixe $z' = \frac{1 - z}{1 + z}$.
4. Calculer $z' + \bar{z}'$ pour $|z| = 1$.
5. En déduire l'image du cercle de rayon 1 de centre 0 privé du point de coordonnées $(-1, 0)$ par l'application g.