Exercice 1 Donner des exemples d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (puis de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) injective et non surjective (puis surjective et non injective).

Exercice 2 Donner des exemples d'applications de $\mathbb{N}^5$ dans $\mathbb{N}$ injectives et non surjectives.

Exercice 3 Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n \quad ; \quad f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \quad ; \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2.$$

Exercice 4 Soit L'application $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z + 1/z$

1. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Donner l'image par f du cercle de centre 0 et de rayon 1.
3. Donner l'image réciproque par f de la droite $i\mathbb{R}$.

Exercice 5 On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 6 Soit $f : X \to Y$.On note

$$\hat{f} : \begin{cases} \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y) \\ A \mapsto f(A) \end{cases} \quad \text{et} \quad \tilde{f} : \begin{cases} \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X) \\ B \mapsto f^{-1}(B) \end{cases}.$$

Montrer que :

1. f est injective ssi $\hat{f}$ est injective.
2. f est surjective ssi $\tilde{f}$ est injective.

Exercice 7 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = id$.

Exercice 8 Soit X un ensemble. Si $A \subset X$ on note χ_A la fonction caractéristique associée. Montrer que $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(X) \to \mathcal{F}(X, \{0,1\}) \\ A \mapsto \chi_A \end{cases}$ est bijective.

Exercice 9 Soit E un ensemble non vide. On se donne deux parties A et B de E et on définit l'application $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $X \mapsto (A \cap X) \cup (B \cap X^c)$. Discuter et résoudre l'équation $f(X) = \emptyset$. En déduire une condition nécessaire pour que f soit bijective.
On suppose maintenant $B = A^c$. Exprimer f à l'aide de la différence symétrique Δ. Montrer que f est bijective, préciser f^{-1}. f est-elle involutive (i.e. $f^2 = id$) ? Quelle propriété en déduit-on ?

Exercice 10

1. Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{R}$ par : $(a,b)\mathcal{R}(a',b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Identifier $E/\mathcal{R}$.
2. Mêmes questions avec $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $(p,q)\mathcal{R}(p',q') \Leftrightarrow pq' = p'q$.

Exercice 11 Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow y = y'.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 12 Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 13 La relation "divise" est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$? sur $\mathbb{Z}$? Si oui, est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice 14 Soient $(X, \leqslant)$ et $(Y, \leqslant)$ deux ensembles ordonnés (on note abusivement les deux ordres de la même façon). On définit sur $X \times Y$ la relation $(x,y) \leqslant (x',y')$ ssi $(x < x')$ ou $(x = x'$ et $y \leqslant y')$. Montrer que c'est un ordre et qu'il est total ssi X et Y sont totalement ordonnés.

Exercice 15 Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ la relation $\mathcal{R}$ par $X\mathcal{R}Y$ ssi $(X = Y$ ou $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leqslant y)$. Vérifier que c'est une relation d'ordre.