Exercice 1 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = \cos x + y$,
2. $y' + y\tan x = 0$, pour x dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Exercice 2 On se propose de résoudre, sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0, \infty[$, l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0, \infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \dfrac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle
$$(E_1) \qquad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$
3. Résoudre (E_1) sur $]0, \infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0, \infty[$.

Exercice 3 Résoudre et raccorder éventuellement :

1. $xy' - 2y = x^4$.
2. $x(1 + x^2)y' = y$.

Exercice 4 Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 2y(x) = 0 \text{ avec } (y - y')(0) = 1.$$

Exercice 5 Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -2 \end{cases} .$$

Exercice 6 Résoudre l'équation différentielle $x^2y^2 - xy' - 3y = 0$ en supposant que y ne s'annule pas et en posant $z = \dfrac{1}{y}$.

Exercice 7 Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^x$.
2. $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$.
3. $y'' + y = e^{-|x|}$.

Exercice 8 Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer selon le paramètre réel m la solution de l'équation :

$$(E_m) \qquad y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2)\cos mx$$

qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 9 Résoudre sur $]0, +\infty[$ $xy'' - y' - x^3y = 0$ en posant $z(t) = y(\sqrt{t})$.

Exercice 10 Résoudre en posant $z(t) = y(e^t)$ ou $y(-e^t)$ suivant le signe de x, les équations différentielles (d'Euler) suivantes :

1. $x^2y'' - 2y = x$.
2. $x^2y'' + xy' + y = x\ln|x|$.

Exercice 11 (difficile) Soit p continue positive non nulle ; montrer que toute solution de $y''(x) + p(x)y(x) = 0$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (difficile) Montrer que toute solution de $y''(x)e^{-x^2} + y(x) = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 En posant $t = \arctan x$, résoudre :

$$y''(x) + \frac{2x}{1 + x^2}y'(x) + \frac{y(x)}{(1 + x^2)^2} = 0.$$

Exercice 14 Résoudre par le changement de fonction $z = \dfrac{y}{x}$ l'équation différentielle :

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 0.$$

Exercice 15 Trouver les $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f''(x) + f(-x) = x$.