

Exercice 1 On considère dans \mathbb{R}^3 , $\Pi = \text{vect}\{(1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$ et $D = \text{vect}\{(0, 1, -1)\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus D$.

Exercice 2 Dans cet exercice (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de \mathbb{R}^3 . On considère les matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}; A = M - I_3 \text{ et } B = M^2 + I_3.$$

1. Calculer les matrices A et B .
2. Résoudre les systèmes homogènes associés ces matrices.
On note E_1 le sev de \mathbb{R}^3 solution du système associé à A et E_2 celui associé à B .
3. Déterminer une base de E_1 et une base de E_2 .
4. Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, puis que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 3 On dit qu'une matrice carrée $N \neq 0$ (la matrice nulle) est nilpotente s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$.

1. Montrer que la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente
2. Montrer que si AB est nilpotente alors il en est de même pour BA .
3. Montrer que si deux matrices nilpotentes A et B commutent (ie: $AB = BA$) alors AB est nilpotente.
4. Soit A une matrice carrée 3×3 telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. On suppose qu'il existe $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que: $A^2 X_0 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $(X_0, AX_0, A^2 X_0)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 4 Soient les matrices:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = U - I_3$$

1. Montrer que U est inversible et déterminer U^{-1} .
2. Ecrire la matrice V et calculer V^2 puis le rang de V .
3. Résoudre le système homogène associé à V et donner une base du sev F des solutions.
4. Déterminer une base $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de \mathbb{R}^3 telle que:
$$U\varepsilon_1 = \varepsilon_1, U\varepsilon_2 = \varepsilon_2, U\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3,$$
ici les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont écrits en colonnes.

Exercice 5 Dans tout l'exercice $a_1, a_2, a_3, b, c \in \mathbb{R}$. On note $D(a_1, a_2, a_3, b, c)$ ou simplement D le déterminant:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b & b \\ c & a_2 & b \\ c & c & a_n \end{vmatrix}$$

1. On suppose dans cette question que $a_1 = a_2 = a_3 = a$.
(a) Calculer D dans le cas: $a = c$ puis $a = b$.
(b) Calculer D dans le cas $b = c$.
2. Dans cette partie, on se place dans le cas général.
(a) on suppose que $b \neq c$. On pose:

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & b + x & b + x \\ c + x & a_2 + x & b + x \\ c + x & c + x & a_n + x \end{vmatrix}.$$

Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} : D(x) = \alpha x + \beta.$$

On ne demande pas dans cette question de préciser α et β .

- (b) Calculer α et β en évaluant $D(x)$ pour des valeurs judicieuses de x .
- (c) En déduire l'expression de $D = D(0)$.
3. Dans cette question, on suppose que $b = c$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose
$$h(t) = D(a_1, a_2, a_3, b, b + t).$$

(a) Établir que h est une fonction continue sur \mathbb{R} .
(b) En déduire la valeur de D .