Exercice 1 Déterminer deux matrices carrées (2×2) A et B telles que : $AB=0$ et $BA\neq 0$.

Exercice 2 On considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\3&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\ \text{ et } C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

1. Montrer que $AB=AC$, a-t-on $B=C$? A peut-elle être inversible ?
2. Déterminer toutes les matrices F telles que $A\times F=0$.

Exercice 3 Déterminer toutes les matrices B telles que $BA=I_2$ où

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\-1&4\end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Calculer l'inverse de

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&-1\\-2&-2&-1\end{pmatrix}.$$

Exercice 5 Discuter suivant les valeurs de $\lambda\in\mathbb{R}$ le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\1/2&1/3&1/4\\1/3&1/4&\lambda\end{pmatrix}.$$

Exercice 6 Soit a un réel, on note A la matrice

$$A=\begin{pmatrix}a&2&1\\1&a&2\\2&1&a\end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(A)$.
2. Pour quelles valeurs de a, A est elle inversible?
3. Dans le cas où la matrice n'est pas inversible, étudier $\operatorname{rang}(A)$.

Exercice 7 Mêmes questions que l'exercice précedent avec la matrice:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{pmatrix}.$$

Exercice 8 Mettre sous forme matricielle et résoudre les systèmes suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcl}x+y+z+t&=&1\\x-y+2z-3t&=&2\\2x+4z+4t&=&3\\2x+2y+3z+8t&=&2\\5x+3y+9z+19t&=&6\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{rcl}2x+y+z+t&=&1\\x+2y+3z+4t&=&2\\3x-y-3z+2t&=&5\\5y+9z-t&=&-6\end{array}\right.$$

Exercice 9 Discuter en fonction des paramètres réels a,b et c :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl}3x&-y&+2z&=&a\\-x&+2y&-3z&=&b\\x&+2y&+z&=&c\end{array}\right.\ ;\qquad\left\{\begin{array}{rcl}x-a(y+z)&=&0\\y-b(x+z)&=&0\\z-c(x+y)&=&0\end{array}\right.$$

Exercice 10 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ,a,b,c,d :

$$\left\{\begin{array}{lcl}(1+\lambda)x+y+z+t&=&a\\x+(1+\lambda)y+z+t&=&b\\x+y+(1+\lambda)z+t&=&c\\x+y+z+(1+\lambda)t&=&d\end{array}\right.$$

Exercice 11 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ et a :

$$\left\{\begin{array}{rcl}3x+2y-z+t&=&\lambda\\2x+y-z&=&\lambda-1\\5x+4y-2z&=&2\lambda\\(\lambda+2)x+(\lambda+2)y-z&=&3\lambda+a\\3x-z+3t&=&-\lambda^2\end{array}\right.$$

Exercice 12 Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\1&2&1\\0&2&2\end{pmatrix}$$

1. Déterminer les $\lambda\in\mathbb{R}$ tels que $\exists X\in\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ vérifiant $AX=\lambda X$.
2. Pour chaque λ déterminer $E_\lambda=\left\{X\in\mathbb{R}^3/AX=\lambda X\right\}$.